



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE

---

Scuola Superiore

Elaborato di Fine Anno

Il Corpo dei Quaternioni Reali

**RELATORE**  
Prof. Pietro Corvaja  
**TUTOR**  
Prof. Pietro Corvaja

**STUDENTE**  
Cristian Curaba

---

Anno Accademico 2019/2020

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 L'insieme dei quaternioni</b>	<b>2</b>
1.1 Definizione e proprietà . . . . .	2
1.2 La norma e il coniugato . . . . .	5
<b>2 I quaternioni per le rotazioni nello spazio 3D</b>	<b>7</b>
2.1 Matrice di rotazione associata ad un quaternione unitario . . .	10
2.2 Calcolo analitico di una rotazione . . . . .	11
2.3 Interpolazione lineare sferica SLERP. . . . .	13
<b>3 Gli angoli di Eulero</b>	<b>15</b>
<b>4 Visualizzare l'azione dei quaternioni unitari</b>	<b>19</b>
4.1 La proiezione stereografica . . . . .	20
4.2 Visualizzare l'azione dei quaternioni tramite la proiezione stereografica . . . . .	25

# Introduzione

Nel seguente elaborato sarà definito l'insieme dei quaternioni come spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{R}$ . L'insieme viene inoltre dotato di un prodotto interno, il che rende l'insieme dei quaternioni un'algebra di divisione (Sezione 1). A partire dall'insieme dei quaternioni unitari, si costruirà un gruppo isomorfo al gruppo delle isometrie dello spazio (Sezione 2). Nella (Sezione 3) sono descritti gli angoli di Eulero e la loro interazione con  $SO_3$  ed il gruppo dei quaternioni unitari. Successivamente, dopo aver definito la proiezione stereografica, si mostrerà l'azione dei quaternioni nello spazio tridimensionale attraverso la visualizzazione dello spazio quadridimensionale proiettato (Sezione 4).

## 1 L'insieme dei quaternioni

I quaternioni furono formalizzati dal matematico irlandese Sir William Rowan Hamilton nell'Ottobre del 1843. Hamilton era alla ricerca di un metodo per estendere i numeri complessi, che possono essere visti come punti su un piano, su un numero maggiore di dimensioni spaziali. Dopo aver ricercato invano un'estensione tridimensionale, ne formulò una con dimensione 4: i quaternioni. In seguito raccontò di aver fatto questa scoperta nel corso di una passeggiata con sua moglie, quando improvvisamente gli venne in mente la soluzione. Eccitato dalla scoperta, incise l'equazione sul lato del vicino ponte Brougham a Dublino. Questa formalizzazione doveva fare a meno della commutatività della moltiplicazione, una scelta radicale per quel tempo. Oggi i quaternioni vengono utilizzati principalmente nella rappresentazione di rotazioni nello spazio tridimensionale. Trovano quindi applicazioni principalmente nella computer grafica, robotica e astronomia.

### 1.1 Definizione e proprietà

Si definisce l'insieme dei quaternioni, indicato con la lettera  $\mathbb{H}$ , come lo spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ , di dimensione 4, avente base  $\{1, i, j, k\}$ . Sia  $q \in \mathbb{H}$ , allora esistono unici  $s, a, b, c \in \mathbb{R}$  tali che:

$$q = s + ai + bj + ck.$$

**Notazione.** Per indicare un generico elemento  $q = s + ai + bj + ck$  di  $\mathbb{H}$ , si utilizzerà la coppia ordinata  $(s, v)$ , dove  $v = (a, b, c)$  è un vettore in  $\mathbb{R}^3$ .

L'insieme dei quaternioni è uno spazio vettoriale, dunque  $(\mathbb{H}, +)$  è un gruppo abeliano.

È possibile inoltre definire un prodotto interno all'insieme  $\mathbb{H}$ . Siano  $q_1 = s_1 + a_1i + b_1j + c_1k$  e  $q_2 = s_2 + a_2i + b_2j + c_2k$  elementi di  $\mathbb{H}$ , allora si definisce il prodotto nel seguente modo:

$$q_1q_2 = (s_1s_2 - a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2) + (s_1a_2 + s_2a_1 + b_1c_2 - c_1b_2)i + \\ + (s_1b_2 + s_2b_1 + c_1a_2 - a_1c_2)j + (s_1c_2 + s_2c_1 + a_1b_2 - a_2b_1)k.$$

La precedente definizione si può ottenere, in modo naturale, distribuendo il prodotto e applicando le seguenti uguaglianze

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ij = -ji = k, \\ jk = -kj = i, \\ ki = -ik = j.$$

**Osservazione.** *Le regole di moltiplicazione tra  $i, j, k$  hanno le stesse proprietà del prodotto vettoriale tra i versori degli assi coordinati di un sistema di riferimento destrorso.*

È possibile ottenere una formula equivalente scritta in modo più compatto. Dati due generici elementi di  $\mathbb{H}$ ,  $q_1 = (s_1, v_1)$  e  $q_2 = (s_2, v_2)$  con  $v_1 = (a_1, b_1, c_1)$  e  $v_2 = (a_2, b_2, c_2)$  si ha che

$$q_1q_2 = (s_1s_2 - v_1 \cdot v_2, s_1v_2 + s_2v_1 + v_1 \wedge v_2)$$

dove:

- $v_1 \cdot v_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \in \mathbb{R}$  è il prodotto scalare tra  $v_1, v_2$ ;
- $v_1 \wedge v_2 = (b_1c_2 - b_2c_1)i - (a_1c_2 - a_2c_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$  è il prodotto vettoriale dei vettori  $v_1, v_2$ .

Si ricorda che il prodotto vettoriale è una forma *bilineare alternante*, ma che non verifica la proprietà associativa:  $(v_1 \wedge v_2) \wedge v_3 \neq v_1 \wedge (v_2 \wedge v_3)$ .

Se la parte reale è 0, il quaternione è detto **puro**. Il prodotto tra due quaternioni puri si semplifica in  $q_1q_2 = (v_1 \cdot v_2, v_1 \wedge v_2)$ .

Il prodotto tra quaternioni **non è commutativo**:  $ij \neq ji$ .

**Osservazione.** *L'insieme dei numeri reali si immerge banalmente nell'insieme  $\mathbb{H}$ . Si noti che il prodotto esterno di un elemento  $\lambda \in \mathbb{R}$  per un elemento  $q = (s, v) \in \mathbb{H}$ , coincide con il prodotto (sia a destra che a sinistra) dell'elemento  $q_0 = (\lambda, \mathbf{0}) \in \mathbb{H}$  per lo stesso elemento  $q$ :*

$$\lambda q = (\lambda s, \lambda v) = qq_0 = q_0q.$$

*Da questo segue banalmente che i numeri reali appartengono al centro di  $\mathbb{H}$ .*

**Proposizione 1.1.** *L'insieme dei numeri reali coincide con il centro di  $\mathbb{H}$*

*Dimostrazione.* Dall'osservazione precedente si ottiene che  $\mathbb{R}$  è incluso nel centro di  $\mathbb{H}$ . Rimane da verificare che nessun altro elemento di  $\mathbb{H}$  appartiene al centro. Sia  $q = (s, a, b, c) \in \mathbb{H}$  tale che non si verifichi contemporaneamente  $a = b = c = 0$  (dunque non reale). Si verifica almeno uno dei seguenti casi

- $c \neq 0$  o  $a \neq 0$ . Considero i prodotti  $(s + ai + bj + ck)(j)$  e  $(j)(s + ai + bj + ck)$ . Si ottiene rispettivamente  $(-b - ci + sj + a)$  e  $(-b + ci + sj - a)$  ed essendo  $c \neq 0$  o  $a \neq 0$  si ottiene che  $q$  non commuta con  $j$ .
- $b \neq 0$ . Considero i prodotti  $(s + ai + bj + ck)(i)$  e  $(i)(s + ai + bj + ck)$ . Si ottiene rispettivamente  $(-a + si + cj - bk)$  e  $(-a + si - cj + bk)$  ed essendo  $b \neq 0$  si ottiene che  $q$  non commuta con  $i$ .

□

In seguito dimostrerò che  $(\mathbb{H}^*, \cdot)$  è gruppo. Siano dati tre generici elementi  $q_1 = (s_1, v_1) = s_1 + a_1i + b_1j + c_1k$ ,  $q_2 = (s_2, v_2) = s_2 + a_2i + b_2j + c_2k$ ,  $q_3 = (s_3, v_3) = s_3 + a_3i + b_3j + c_3k$ , allora

- il prodotto tra quaternioni è associativo:

$$(q_1q_2)q_3 = q_1(q_2q_3).$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} (q_1q_2)q_3 &= (s_1s_2 - v_1 \cdot v_2, s_1v_2 + s_2v_1 + v_1 \wedge v_2)(s_3, v_3) = \\ &= (s_1s_2s_3 - s_3v_1 \cdot v_2 - s_1v_1 \cdot v_3 - s_2v_1 \cdot v_3 - (v_1 \wedge v_2)v_3, \\ &\quad s_1s_2v_3 - (v_1 \cdot v_2)v_3 + s_3s_1v_2 + s_3s_2v_1 + s_3v_1 \wedge v_2 + \\ &\quad + s_1v_2 \wedge v_3 + s_2v_1 \wedge v_3 + (v_1 \wedge v_2) \wedge v_3) = \end{aligned}$$

Osservando che  $v_1(v_2 \wedge v_3) = (v_1 \wedge v_2)v_3$

$$= (s_1, v_1)(s_2s_3 - v_1 \cdot v_3, s_2v_3 + s_3v_2 + v_2 \wedge v_3) = q_1(q_2q_3).$$

□

- L'elemento neutro è  $(1, 0, 0, 0)$  o  $(1, \mathbf{0})$ :

$$q_1(1, \mathbf{0}) = (s_1, v_1) = (1, \mathbf{0})q_1.$$

- Ogni elemento diverso da  $(0, \mathbf{0})$  è invertibile:

$$q_1^{-1} = \frac{(s_1, -a_1, -b_1, -c_1)}{s_1^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}.$$

*Dimostrazione.*

$$q_1 q_1^{-1} = (s_1, a_1, b_1, c_1) \frac{(s_1, -a_1, -b_1, -c_1)}{s^2 + a^2 + b^2 + c^2} = \frac{s^2 + a^2 + b^2 + c^2}{s^2 + a^2 + b^2 + c^2} = 1$$

□

Dunque  $(\mathbb{H}^*, \cdot)$  è un gruppo (non abeliano). Inoltre il prodotto distribuisce a sinistra (e analogamente a destra) rispetto la somma:

$$q_1(q_2 + q_3) = q_1 q_2 + q_1 q_3.$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} q_1(q_2 + q_3) &= \\ &= (s_1 s_2 + s_1 s_3 - v_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot v_3, s_1 v_2 + s_1 v_3 + s_2 v_1 + s_3 v_1 + v_1 \wedge v_2 + v_1 \wedge v_3) = \\ &= ((s_1 s_2 - v_1 \cdot v_2) + (s_1 s_3 - v_1 \cdot v_3), (s_1 v_2 + s_2 v_1 + v_1 \wedge v_2) + (s_1 v_3 + s_3 v_1 + v_1 \wedge v_3)) = \\ &= q_1 q_2 + q_1 q_3. \end{aligned}$$

□

Le precedenti proprietà rendono  $\mathbb{H}$  un *algebra di divisione non commutativa*.

## 1.2 La norma e il coniugato

Sia dato un quaternionione  $q = (s, v) = s + ai + bj + ck$ . Si definisce il *coniugato* di  $q$ , il quaternionione definito come segue:

$$\bar{q} = s - ai - bj - ck.$$

Se  $q$  è un quaternionione puro, vale:  $\bar{q} = -q$ .

Valgono le seguenti proprietà:

**Proposizione 1.2.** *Sia  $q \in \mathbb{H}$  un generico elemento; allora  $\bar{\bar{q}} = q$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $q = (s, v)$ , allora  $\bar{q} = (s, -v)$  e dunque  $\bar{\bar{q}} = (s, -(-v)) = (s, v) = q$ . □

**Proposizione 1.3.** *Siano  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$  due generici elementi, allora  $\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $q_1 = (s_1, v_1)$ ,  $q_2 = (s_2, v_2)$  elementi di  $\mathbb{H}$ , allora  $\overline{q_1 q_2} = (s_1 s_2 - v_1 \cdot v_2, -s_1 v_2 - s_2 v_1 - v_1 \wedge v_2) = (s_1 s_2 - v_1 \cdot v_2, -s_2 v_1 - s_1 v_2 + v_2 \wedge v_1) = \bar{q}_2 \bar{q}_1$ . □

**Proposizione 1.4.** *Siano  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$  due generici elementi, allora  $\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $q_1 = (s_1, v_1), q_2 = (s_2, v_2)$  elementi di  $\mathbb{H}$ , allora  $\overline{q_1 + q_2} = (s_1 + s_2, -v_1 - v_2) = \bar{q}_1 + \bar{q}_2$ .  $\square$

Si definisce *norma* del quaternione, indicato con  $\|q\|$ , il numero reale non negativo:

$$\|q\| = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{s^2 + v \cdot v} = \sqrt{s^2 + a^2 + b^2 + c^2}.$$

La norma di  $q$  è nulla se e solo se  $q = 0$ .

**Osservazione.** *Si noti che, dato un generico  $q \in \mathbb{H}, q \neq 0$ , allora il suo inverso si scrive nella forma più compatta:  $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$ .*

**Proposizione 1.5.** *Siano  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$  due generici elementi, allora  $\|q_1 q_2\| = \|q_1\| \|q_2\|$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $q_1 = (s_1, v_1), q_2 = (s_2, v_2)$  elementi di  $\mathbb{H}$ , allora  $\|q_1 q_2\| = \sqrt{q_1 q_2 \bar{q}_1 \bar{q}_2} = \sqrt{q_1 q_2 \bar{q}_2 \bar{q}_1}$  per 1.2. Per definizione  $\sqrt{q_2 \bar{q}_2} = \|q_2\|$  ed essendo un numero reale, commuta con qualsiasi elemento di  $\mathbb{H}$ . Dunque  $\sqrt{q_1 q_2 \bar{q}_2 \bar{q}_1} = \|q_2\| \sqrt{q_1 \bar{q}_1} = \|q_1\| \|q_2\|$ .  $\square$

**Lemma 1.1.** *Sia  $q = ai + bj + ck$  un generico quaternione puro, allora  $q^2 = -\|q\|^2$*

*Dimostrazione.* Si svolge il prodotto

$$q^2 = -a^2 - b^2 - c^2 + (bc - cb)i + (ac - ca)j + (ab - ba)k = -(a^2 + b^2 + c^2) = -\|q\|^2$$

$\square$

**Proposizione 1.6.** *Siano dati  $q_1 = (s_1, v_1), q_2 = (s_2, v_2)$  elementi di  $\mathbb{H}$  non reali, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1.  $\|q_1\| = \|q_2\|$  e  $s_1 = s_2$ .
2. esiste  $0 \neq q_0 \in \mathbb{H}$  tale che  $q_2 = q_0^{-1} q_1 q_0$ .

*Dimostrazione.* 2.  $\rightarrow$  1. L'uguaglianza  $\|q_1\| = \|q_2\|$  è soddisfatta se  $q_2 = q_0^{-1} q_1 q_0$  per qualche  $q_0$ . Ricordando che  $q_0^{-1} = \frac{\bar{q}_0}{\|q_0\|}$  si ottiene che:

$$q_2 \bar{q}_0 \|q_0\| = \bar{q}_0 \|q_0\| q_1.$$

Semplificando  $\|q_0\|$  (essendo reale commuta con qualsiasi elemento di  $\mathbb{H}$ ) e sviluppando il prodotto si ottiene facilmente che  $s_1 = s_2$ .

1.  $\rightarrow$  2. Se  $q_2 = q_1$  allora si verifica la tesi per  $q_0 = 1$ . Supponiamo  $q_2 \neq q_1$ . Consideriamo il caso  $s_1 = s_2 = 0$  e supponiamo  $q_2 \neq -q_1$  e quindi  $q_0 = q_1 + q_2 \neq 0$ . Da  $s_1 = s_2$  e  $\|q_1\| = \|q_2\|$  e per il Lemma 1.1 deduciamo  $q_1^2 = -\|q_1\|^2 = -\|q_2\|^2 = q_2^2$ . Da questo segue immediatamente che  $q_0q_2 = q_1q_0$  da cui la tesi. Se  $q_2 = -q_1 \neq 0$  è sufficiente scegliere un elemento  $q_0 \neq 0$  con  $s_0 = 0$  che annulli  $v_1$ . Immaginando  $q_0$  e  $q_1$  come elementi vettoriali di  $\mathbb{R}^3$ ,  $q_0$  è sufficiente sceglierlo sulla retta vettoriale generata da  $q_1$ , così che  $v_0 \cdot v_1 = 0$ . Si ottiene che  $q_1q_0 = -q_1q_0$  da cui  $q_2 = q_0^{-1}q_1q_0$ . Supponiamo adesso il caso generale in cui  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ . Considero  $\tilde{q}_1 = q_1 - s_1$  e  $\tilde{q}_2 = q_2 - s_2$ . Notiamo che  $\tilde{s}_2 = \tilde{s}_1$  e  $\|q_2\| = \|q_1\|$ . Per argomentazioni precedenti esiste  $q_0 \neq 0$  tale che  $\tilde{q}_2 = q_0^{-1}\tilde{q}_1q_0$ . Dato che  $s_1 = s_2$  per ipotesi, si ottiene immediatamente che  $q_2 = q_0^{-1}q_1q_0$ .  $\square$

## 2 I quaternioni per le rotazioni nello spazio 3D

In seguito si vuole costruire un gruppo, che si identifica con un sottoinsieme dei quaternioni unitari, isomorfo alle rotazioni dello spazio tridimensionale.

Si supponga che un quaternione unitario possa operare su un quaternione puro (che identifica univocamente un punto in  $\mathbb{R}^3$ ) nello stesso modo in cui, una matrice di  $SO_3$ , opera su un vettore di  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $q_1 = (s_1, v_1) \in \mathbb{H}$  e  $q_0 = (0, v_0) \in \mathbb{H}$  allora

$$q_1q_0 = (v_1v_0, s_1v_0 + v_1 \wedge v_0).$$

Si nota che il prodotto potrebbe non appartenere all'insieme dei quaternioni puri ( $v_1v_0$  è nullo se e solo se ortogonali), dunque non è possibile definire una azione del gruppo dei quaternioni unitari sull'insieme  $\mathbb{R}^3$  tramite moltiplicazione a sinistra.

Si vuole verificare che, dato quaternione puro  $q_0$  e un elemento  $q_1 \in \mathbb{H}$ , il prodotto

$$q_1q_0\bar{q}_1$$

identifica un quaternione puro. Sono possibili due brevi verifiche: si può banalmente svolgere il prodotto oppure si può verificare che  $\bar{q}_1 = q_1^{-1}$  e dunque segue per la proposizione (1.6). Sia  $q \in \mathbb{H}$  unitario, si definisce  $L_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione che, dato un quaternione puro  $q_0$

$$L_q(q_0) = qq_0\bar{q}. \quad (1)$$

Si vuole verificare che l'insieme delle funzioni  $L_q$ , definito in (1), sia omoomorfo al gruppo  $SO_3$ . Per farlo verificherò che sono soddisfatte le proprietà che rendono  $SO_3$  il gruppo delle rotazioni di  $\mathbb{R}^3$ .



Dato un quaternionio unitario  $q_1 = (s_1, v_1)$  vale

$$s_1^2 + \|v_1\|^2 = 1.$$

Dunque è possibile trovare un angolo  $-\pi < \theta \leq \pi$  tale che

$$s_1^2 = \cos^2 \theta \quad \|v_1\|^2 = \sin^2 \theta.$$

Si  $u$  il vettore unitario che descrive la direzione del quaternionio  $q_1$ , ovvero

$$u = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sin \theta}.$$

Si può così definire il quaternionio unitario  $q_1$  in funzione di  $\theta, u$

$$q_1 = (s_1, v_1) = \cos \theta + u \sin \theta. \quad (2)$$

Si nota che, per un quaternionio espresso in questa forma, sostituendo  $-\theta$  a  $\theta$  si ottiene il coniugato dello stesso:

$$\bar{q}_1 = \cos \theta - u \sin \theta = \cos - \theta + u \sin -\theta. \quad (3)$$

Un'altra proprietà fondamentale di ogni elemento di  $SO_3$ , è l'invarianza della *norma*, ed anch'essa è banalmente verificata

$$q_2 = \bar{q}_1 q_0 q_1, \quad (4)$$

$$\|q_2\| = \|\bar{q}_1 q_0 q_1\| = \|\bar{q}_1\| \|q_0\| \|q_1\| = 1 \|q_0\| 1 = \|q_0\|. \quad (5)$$

Dati due quaternioni espressi nella forma (2) con stessa direzione  $u$

$$q_1 = \cos \theta + u \sin \theta,$$

$$q_2 = \cos \alpha + u \sin \alpha,$$

ne calcoliamo il prodotto

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha + u(\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha) = \\ &= \cos(\theta + \alpha) + u \sin(\theta + \alpha). \end{aligned}$$

Si nota che moltiplicare due quaternioni unitari di stessa direzione  $u$  implica sommare gli angoli che li definiscono. Data la precedente proprietà e la proprietà (3), si deduce che l'inverso  $q_1^{-1}$  di un quaternionio unitario  $q_1$  coincide con il coniugato  $\bar{q}_1$ :

$$q_1 q_1^{-1} = q_1 \bar{q}_1 = 1.$$

Sia  $L_q$  definito in (1), si definisce  $G = \{L_q : q \in \mathbb{H} \setminus \{0\} \text{ è unitario}\}$  e sia  $\circ$  l'operazione definita come segue:

$$\begin{aligned} \circ : G \times G &\rightarrow G \\ (L_{q_1}, L_{q_2}) &\mapsto L_{q_1 q_2} \end{aligned}$$

Si noti che, dato un generico quaternionio unitario  $q$ , allora  $q$  e  $-q$  definiscono uno stesso elemento di  $G$ , infatti  $L_q = L_{-q}$ .

Si verifica che  $(G, \circ)$  è un gruppo:

- associatività:  $(L_{q_1} \circ L_{q_2}) \circ L_{q_3} = L_{q_1} \circ (L_{q_2} \circ L_{q_3}) \quad \forall L_{q_1}, L_{q_2}, L_{q_3} \in G.$

*Dimostrazione.* Segue banalmente dall'associatività del prodotto di quaternioni:

$$\begin{aligned} (L_{q_1} \circ L_{q_2}) \circ L_{q_3} &= L_{q_1 q_2} \circ L_{q_3} = L_{(q_1 q_2) q_3} = L_{q_1 (q_2 q_3)} = \\ &= L_{q_1} \circ (L_{q_2 q_3}) = L_{q_1} \circ (L_{q_2} \circ L_{q_3}). \end{aligned}$$

□

- Esistenza dell'elemento neutro:  $L_{q_1} \circ L_{1_{\mathbb{H}}} = L_{1_{\mathbb{H}}} \circ L_{q_1} = L_{q_1}.$

*Dimostrazione.*  $L_{q_1} \circ L_{1_{\mathbb{H}}} = L_{q_1 1_{\mathbb{H}}} = L_{1_{\mathbb{H}} q_1} = L_{1_{\mathbb{H}}} \circ L_{q_1} = L_{q_1}.$

□

- Esistenza dell'inverso:  $\forall L_q \quad L_q \circ L_{\bar{q}} = L_{1_{\mathbb{H}}}.$

*Dimostrazione.*  $L_q \circ L_{\bar{q}} = L_{q \bar{q}} = L_{1_{\mathbb{H}}}.$

□

Si può definire l'azione del gruppo  $G$  sull'insieme  $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ :

$$\begin{aligned} G \times S_2 &\rightarrow S_2, \\ (L_q, P) &\mapsto L_q(P). \end{aligned}$$

Come verificato nell'equazione (4), ogni elemento di  $G$  muove un punto di  $S_2$  in un punto di  $S_2$ . Si dimostra che la precedente definizione verifica le proprietà di un'azione di gruppo su  $S_2$ :

- $L_{1_{\mathbb{H}}}(P) = P \quad \forall P \in S_2;$

*Dimostrazione.*  $L_{1_{\mathbb{H}}}(P) = \bar{1}P1 = P$

□

- $L_{q_1}(L_{q_2}(P)) = (L_{q_1} \circ L_{q_2})(P) \quad \forall L_{q_1}, L_{q_2} \in G, \quad \forall P \in S_2.$

*Dimostrazione.*  $L_{q_1}(L_{q_2}(P)) = L_{q_1}(q_2 P \bar{q}_2) = q_1 q_2 P \bar{q}_2 \bar{q}_1$ , per la proprietà (1.3) si ottiene che:  $q_1 q_2 P \bar{q}_2 \bar{q}_1 = q_1 q_2 P \overline{q_1 q_2} = L_{q_1 q_2}(P) = (L_{q_1} \circ L_{q_2})(P).$

□

Si può inoltre verificare che l'azione è transitiva, ovvero:

$$\forall P_1, P_2 \in S_2, \exists L_q \in G : L_q(P_1) = P_2$$

La verifica della precedente proprietà viene posta a seguito della costruzione di una biezione tra  $SO_3$  e  $G$  (fine sezione 2.1).

## 2.1 Matrice di rotazione associata ad un quaternion unitario

Si vuole calcolare la matrice  $M_q \in SO_3$  corrispondente ad un elemento del gruppo  $G = \{L_q : q \in \mathbb{H} \setminus \{0\} \text{ è unitario}\}$ .

Dati  $q \in \mathbb{H}$  unitario e  $q_0 \in \mathbb{H}$  puro, si calcola  $L_q$  definito in (1).

$$\begin{aligned} L_q(q_0) &= \bar{q}q_0q = (s, v)(0, v_0)(s, -v) = (v \cdot v_0, sv_0 + v \wedge v_0)(s, -v) = \\ &= ((v \wedge v_0)v, -(v \cdot v_0)v + s^2v_0 + s(v \wedge v_0) + s(v_0 \wedge (-v)) - (v \wedge v_0) \wedge (v)). \end{aligned}$$

Ricordando che  $(v \wedge v_0)v$  è nullo perché è nullo il prodotto scalare di vettori ortogonali e dando per noto il triplo prodotto vettoriale  $(v \wedge v_0) \wedge (v) = v_0\|v\|^2 - v(v \cdot v_0)$  si ottiene che

$$\begin{aligned} &(0, -(v \cdot v_0)v + s^2v_0 + 2s(v \wedge v_0)) - v(v \cdot v_0) + \|v\|^2v_0 = \\ &= v_0(s^2 - \|v\|^2) + 2s(v \wedge v_0) + 2(v \cdot v_0)v \end{aligned} \quad (6)$$

e sommando  $s^2 + \|v\|^2 - 1$  nel fattore moltiplicativo di  $v_0$ , si ottiene l'equivalente formula

$$(2s^2 - 1)v_0 + 2(v \cdot v_0)v_0 + 2s(v \wedge v_0). \quad (7)$$

Si identifica  $v_0$  con un punto  $P = (x_1, x_2, x_3)^t$  e  $q = (s, v_x, v_y, v_z)$ .

$$\begin{aligned} (2s^2 - 1)(x_1, x_2, x_3)^t &= \begin{pmatrix} 2s^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2s^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2s^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \\ 2s(v \wedge (x_1, x_2, x_3)) &= 2s \begin{pmatrix} 0 & v_z & -v_y \\ -v_z & 0 & v_x \\ v_y & -v_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \\ 2(v(x_1, x_2, x_3))v &= 2 \begin{pmatrix} v_x^2 & v_x v_y & v_x v_z \\ v_x v_y & v_y^2 & v_y v_z \\ v_x v_z & v_y v_z & v_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dunque la matrice  $M_q$  associata all'operatore  $L_q$  è pari alla somma delle tre matrici sopra riportate, in forma compatta:

$$M_q = (2s^2 - 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2s \begin{pmatrix} 0 & v_z & -v_y \\ -v_z & 0 & v_x \\ v_y & -v_x & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} v_x^2 & v_x v_y & v_x v_z \\ v_x v_y & v_y^2 & v_y v_z \\ v_x v_z & v_y v_z & v_z^2 \end{pmatrix}.$$

Si può verificare che il determinante della matrice è pari ad 1, il che dimostra che il gruppo  $G$  definisce isometrie dirette in  $\mathbb{R}^3$ .

Si può costruire anche la trasformazione inversa, da matrice di rotazione a quaternione unitario. La traccia (somma degli elementi sulla diagonale) è  $6s^2 + 2v_x^2 + 2v_y^2 + 2v_z^2 - 3$ . Dunque, essendo che  $s^2 + v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 1$ , si ottiene che la traccia è pari ad  $4s^2 - 1$ . Dunque

$$4s^2 - 1 = M_{0,0} + M_{1,1} + M_{2,2},$$

ovvero

$$s = \pm \frac{1}{2} \sqrt{M_{0,0} + M_{1,1} + M_{2,2} + 1}. \quad (8)$$

Inoltre si possono ottenere per sottrazione anche le tre componenti della parte immaginaria del quaternione unitario:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{M_{2,1} - M_{1,2}}{4s}; \\ v_y &= \frac{M_{0,2} - M_{2,0}}{4s}; \\ v_z &= \frac{M_{1,0} - M_{0,1}}{4s}. \end{aligned}$$

Si nota che la mappa è suriettiva ma non iniettiva, in quanto ad ogni matrice sono associati i due quaternioni  $q, -q$  che determinano la stessa rotazione, infatti:

$$L_q(q_0) = \bar{q}q_0q = -\bar{q}q_0(-q) = L_{-q}(q_0).$$

Questo verifica la transitività dell'azione del gruppo  $G = \{L_q : q \text{ è un quaternione unitario}\}$  su  $S_2$ . Infatti, dati due elementi  $P_1, P_2 \in S_2$ , sappiamo che esiste una matrice  $M \in SO_3$  tale che  $M(P_1) = P_2$ , da cui si può ricavare la coppia di quaternioni  $q_1, q_2$  a cui è associato l'elemento  $L_{q_1} = L_{q_2} \in G$  che verifica  $L_{q_1}(P_1) = P_2$ .

## 2.2 Calcolo analitico di una rotazione

È possibile ricavare, anche da una prospettiva geometrica ed analitica, la coppia di quaternioni associata ad una generica rotazione nello spazio affine di  $\mathbb{R}^3$ . Considero un sistema cartesiano ortogonale destrorso di origine  $O$ . Siano  $P, Q, N \in \mathbb{R}^3$  punti distinti tali che i vettori  $\overrightarrow{PN}$  e  $\overrightarrow{QN}$  siano unitari e  $\overrightarrow{ON}$  sia perpendicolare al piano passante per  $P, Q, N$ . Sia  $0 < \Phi \leq \pi$  l'angolo tale che  $\cos \Phi = \overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{QN}$ . Sia  $\hat{n}$  il versore perpendicolare al piano passante per  $N, P, Q$ . Chiamo  $r' = \overrightarrow{QO}, r = \overrightarrow{PO}$ . Si vuole ottenere  $r'$  in funzione di

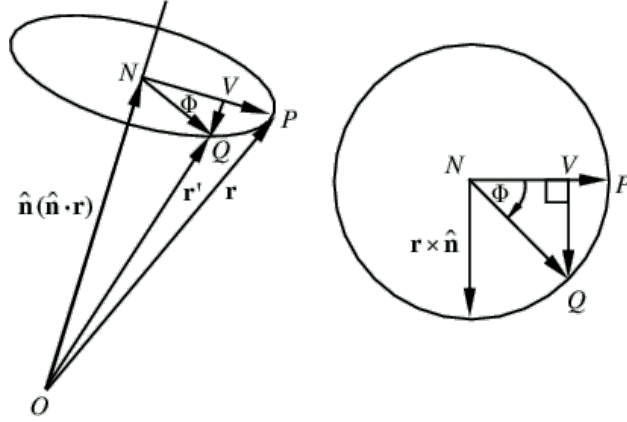


Figura 1

$r, \Phi, \hat{n}$  (il che rappresenta una rotazione di angolo  $\Phi$ , attorno all'asse generato da  $\hat{n}$ ).

Vale

$$r' = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NV} + \overrightarrow{VQ}.$$

Utilizzando proprietà trigonometriche si ottiene:

$$\begin{aligned} r' &= \hat{n}(\hat{n}r) + (r - \hat{n}(\hat{n}r)) \cos \Phi + (r \wedge \hat{n}) \sin \Phi = \\ &= r \cos \Phi + \hat{n}(\hat{n}r)(1 - \cos \Phi) + (r \wedge \hat{n}) \sin \Phi. \end{aligned} \quad (9)$$

Considero un generico quaternion unitario  $q = (s, tA)$  dove  $0 \leq t \leq 1$  e  $A \in \mathbb{R}^3$  vettore di norma 1. Allora si ottiene che

$$L_q(q_0) = v_0(s^2 - t^2) + 2ts(A \wedge v_0) + 2t^2(Av_0)A.$$

Si vuole determinare  $q$  affinché  $L_q(r) = r'$ , dunque si eguaglia l'equazione 9 all'equazione precedente e si ricava che:

$$\begin{aligned} \cos \Phi &= s^2 - t^2, \\ (1 - \cos \Phi) &= 2t^2, \\ \sin \Phi &= 2st. \end{aligned}$$

Applicando le formule di duplicazione e sostituendo si ottiene che

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\Phi}{2} - \sin^2 \frac{\Phi}{2} &= s^2 - t^2, \\ (1 - \cos^2 \frac{\Phi}{2} - \sin^2 \frac{\Phi}{2}) &= 2t^2, \\ 2 \cos \frac{\Phi}{2} \sin \frac{\Phi}{2} &= 2st. \end{aligned}$$

Da cui si ottiene che

$$\begin{aligned}\pm \cos \frac{\Phi}{2} &= s, \\ \pm \sin \frac{\Phi}{2} &= t.\end{aligned}$$

Quindi i quaternioni unitari  $\pm q$  che definiscono una rotazione intorno all'asse generato da  $A$ , di angolo  $\Phi$  è:

$$q = \pm \left( \cos \frac{\Phi}{2} + A \sin \frac{\Phi}{2} \right). \quad (10)$$

### 2.3 Interpolazione lineare sferica SLERP.

Per interpolazione si intende un metodo per individuare nuovi punti a partire da due punti dati. Si propone di trovare un metodo per descrivere, data una rotazione, tutte le rotazioni intermedie. Le funzioni che verranno introdotte sono fondamentali nella computer grafica per animare delle rotazioni.

I principali metodi usati per animare una rotazione sono due: l'interpolazione lineare (Lerp) e l'interpolazione lineare sferica (Slerp).

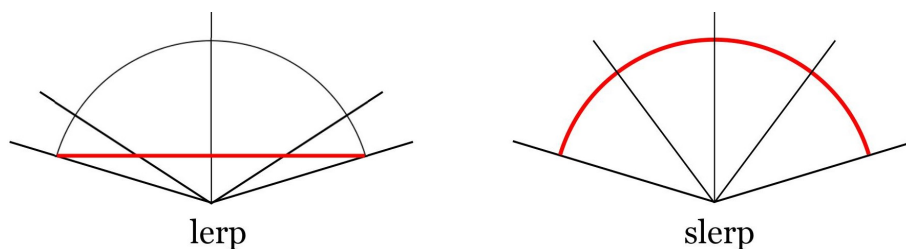


Figura 2

Dati  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$  e  $0 \leq t \leq 1$ , Lerp è la funzione definita come segue:

$$Lerp(q_1, q_2, t) = (1 - t)q_1 + tq_2.$$

L'interpolazione lineare produce una animazione continua ad una velocità *non uniforme*. In particolare, l'animazione risulterebbe rallentata agli estremi e accelerata a metà percorso.

Se si desidera animare una rotazione in modo continuo ed uniforme (cioè a velocità angolare costante), è necessario interpolare lungo una linea geodetica. Una linea geodetica di estremi  $A, B \in \mathbb{R}^3$  è l'arco della circonferenza di estremi  $A, B$  individuata dall'intersezione tra la sfera, centrata nell'origine e passante per  $A, B$  e il piano passante per  $A, B$  e l'origine.

In seguito si vuole ottenere, per via analitica, la formula dello Slerp. Senza perdita di generalità, si esaminerà la situazione in due dimensioni (vedi figura 3): siano  $A$  e  $B$  il primo e l'ultimo punto dell'arco e  $\Omega$  l'angolo compreso tra i due. Consideriamo poi un punto intermedio  $p$  che forma con

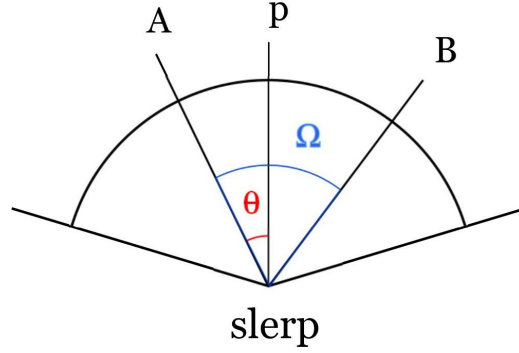


Figura 3

A un angolo  $\theta$ . Sarà:  $\cos(\Omega) = \vec{A} \cdot \vec{B}$ . Inoltre  $\cos(\theta) = \vec{A} \cdot p$  e  $\|p\| = 1$ . L'interpolazione lineare sferica è la funzione che associa ogni punto della geodetica ad una combinazione lineare degli estremi dell'arco. Per ricavare la formula dello slerp, è conveniente ragionare nel caso in cui i due vettori,  $\vec{A}, \vec{B}$  siano perpendicolari, ovvero  $\Omega = 90^\circ$ . Avremo quindi che  $\theta = t\frac{\pi}{2}$  con  $t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1$ . Sarà  $p = \vec{A} \cos \theta + \vec{B} \sin \theta$ . Applicando l'identità trigonometrica  $\cos \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$  si ottiene

$$p = \vec{A} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \vec{B} \sin \theta$$

Nel caso generale in cui i vettori  $A, B$  non siano perpendicolari, si applica una normalizzazione ad entrambi i fattori moltiplicandoli per  $\frac{1}{\sin \Omega}$ :

$$p = \frac{A \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sin \Omega} + \frac{B \sin \theta}{\sin \Omega}.$$

Generalizzando in  $4D$  l'interpolazione di due quaternioni unitari  $q_1, q_2$ , tali che  $q_1 \cdot q_2 = \cos \Omega$ , considerando  $\theta = u$  come parametro in  $\mathbb{R}, 0 \leq u \leq 1$  si ha:

$$\text{slerp}(q_1, q_2, u) = q_1 \frac{\sin(1-u)\Omega}{\sin \Omega} + q_2 \frac{\sin u\Omega}{\sin \Omega}.$$

Si deve tenere conto che esistono due archi geodetici di estremi  $q_1, q_2$ : uno definito dall'angolo  $\Omega$ , l'altro da  $2\pi - \Omega$ . Ciò segue dal fatto che l'operatore  $L_q$  definito in (1) produce lo stesso risultato con  $q$  e  $-q$ . Un modo per capire quale delle due possibilità rappresenta l'arco geodetico più breve è calcolare

la distanza euclidea tra  $q_1, q_2$  e la distanza tra  $q_1, -q_2$ . Mettendoli a confronto si è in grado di distinguere le due geodetiche e si può decidere di sostituire  $q_2$  con  $-q_2$ .

### 3 Gli angoli di Eulero

Gli angoli di Eulero sono stati introdotti per descrivere l'orientamento di un corpo rigido nello spazio. Eulero, nel 1775, affermò che ogni spostamento di un corpo rigido nello spazio tridimensionale, con un punto che rimane fisso, è equivalente ad una singola rotazione del corpo intorno ad un asse passante per il punto fisso (anche noto come *teorema di Eulero*). In altri termini, dati due sistemi di riferimento cartesiani ortogonali e co-originari,  $(x, y, z)$  e  $(X, Y, Z)$ , esiste sempre un asse di rotazione ed un angolo che definiscono una rotazione che li porta a coincidere.

Ogni rotazione può quindi essere descritta mediante i tre *angoli di Eulero*, che specificano una sequenza di tre successive rotazioni, intorno agli assi coordinati. Si può immaginare che, i primi due angoli individuino l'inclinazione dell'asse e il terzo angolo, in linea con il *teorema di Eulero*, completi la rotazione dell'oggetto.

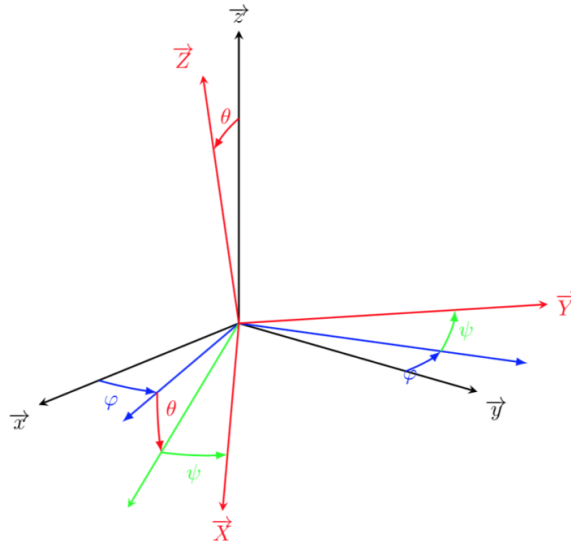
La tripletta viene usualmente indicata con la notazione  $(\phi, \theta, \psi)$  dove  $0 \leq \phi, \theta, \psi \leq 2\pi$ . Si considerano gli assi  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  fissati, mentre gli assi  $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$  solidali con il corpo rigido. Esistono diverse sequenze possibili, di lunghezza 3, per definire in modo completo la rotazione di un oggetto. Di seguito si fa riferimento alla convenzione associata agli angoli ZYZ caratterizzati dalle seguenti operazioni:

- Rotazione di angolo  $\phi$  intorno all'asse z.
- Rotazione di angolo  $\theta$  intorno all'asse y (corrente).
- Rotazione di angolo  $\psi$  intorno all'asse z (corrente).

Dal punto di vista dell'algebra lineare, il passaggio dal sistema di riferimento fisso xyz a quello ruotato XYZ equivale ad operare un cambiamento di base, ovvero passare da una base  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ , rispettivamente i versori degli assi  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ , alla base  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ , versori degli assi  $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$  tramite una matrice di  $SO_3$ . La matrice  $A \in SO_3$  associata alla terna  $(\phi, \theta, \psi)$  si ottiene moltiplicando le 3 matrici associate ai rispettivi angoli e assi di rotazione. Per una rotazione intorno all'asse Z di un angolo  $\phi$ :

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$





Per una rotazione intorno all'asse  $Y$  di un angolo  $\theta$ :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Per una rotazione intorno all'asse  $Z$  di un angolo  $\psi$ :

$$\begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, moltiplicando nell'ordine inverso (composizione di funzioni lineari), otteniamo la matrice relativa alla rotazione complessiva:

$$\begin{aligned} A &= \text{Rot}(z, \psi)\text{Rot}(y, \theta)\text{Rot}(z, \phi) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Viceversa, si vogliono determinare gli angoli di Eulero, sequenza ZYZ, a partire da una matrice  $R \in SO_3$ . Per farlo si introduce una funzione che è estensione della usuale funzione arcotangente  $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ . Si definisce la

funzione  $\arctan2 : R \times R \rightarrow R$  nel seguente modo:

$$\arctan2(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & \text{se } x > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & \text{se } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & \text{se } x < 0 \wedge y < 0, \\ +\frac{\pi}{2}, & \text{se } x = 0 \wedge y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{se } x = 0 \wedge y < 0, \\ \text{non definita}, & \text{se } x = 0 \wedge y = 0. \end{cases}$$

La funzione è un'estensione della funzione arcotangente  $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$  in quanto, a differenza di essa, è in grado di distinguere tra angoli diametralmente opposti, tenendo conto non solo del rapporto tra gli argomenti ma anche del loro segno. Infatti, la funzione arcotangente restituisce lo stesso valore per le coppie  $(x, y)$  e  $(-x, -y)$  così come per le coppie  $(x, -y)$  e  $(-x, y)$ , determinando quindi solo l'ampiezza dell'angolo rispetto all'asse  $X$  ma non il suo effettivo posizionamento rispetto ai quadranti degli assi cartesiani. Un altro aspetto importante della funzione arcotangente2 è che essa, a differenza della funzione semplice  $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ , è definita anche nel caso  $x = 0$ . Infatti, dalla definizione di cui sopra, si ottiene:

$$\text{atan2}(y, 0) = \begin{cases} \arccos(0) = \frac{\pi}{2}, & \text{se } y > 0 \\ -\arccos(0) = -\frac{\pi}{2}, & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

da cui si ricava che  $\text{atan2}(y, 0)$  esprime l'angolo retto orientato rispetto all'asse  $X$ .

Assegnata una matrice  $R \in SO_3$

$$R = (r_1 r_2 r_3) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

si cerca di determinare (se possibile) la terna  $(\phi, \theta, \psi)$  tale che

$$R = \text{Rot}(z, \psi)\text{Rot}(y, \theta)\text{Rot}(z, \phi) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cos \phi \sin \theta \\ a_{21} & a_{22} & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \phi \cos \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi, \\ a_{12} &= -\cos \phi \cos \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi, \\ a_{21} &= \sin \phi \cos \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \psi, \\ a_{22} &= -\sin \phi \cos \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi. \end{aligned}$$

Se  $r_{13}^2 + r_{23}^2 = \sin^2 \theta \neq 0$  si possono avere due soluzioni isolate:

- Se  $\theta \in (0, \pi)$ , ( $\sin \theta > 0$ ) si ha la soluzione

$$\begin{cases} \psi = \text{atan2}(r_{21}, r_{13}), \\ \theta = \text{atan2}(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}), \\ \psi = \text{atan2}(r_{32}, -r_{31}). \end{cases}$$

- Se  $\theta \in (-\pi, 0)$ , ( $\sin \theta < 0$ ) si ha la soluzione:

$$\begin{cases} \psi = \text{atan2}(-r_{21}, -r_{13}), \\ \theta = \text{atan2}(-\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}), \\ \psi = \text{atan2}(-r_{32}, +r_{31}). \end{cases}$$

Se  $r_{13}^2 + r_{23}^2 = \sin^2 \theta = 0$  si possono avere due condizioni, ossia  $\cos \theta = \pm 1$ . In tal caso si guarda l'elemento  $r_{33}$  che è proprio il  $\cos \theta$ . Se  $r_{33} = +1$  allora  $\theta = 0$ . In questo caso gli elementi  $r_{11}$  ed  $r_{21}$  valgono rispettivamente:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi = \cos(\phi + \psi) \\ r_{21} &= \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi = -r_{12} \end{aligned}$$

In tal caso si riesce pertanto a determinare solo

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ \phi + \psi = \text{atan2}(r_{21}, r_{11}) = \text{atan2}(-r_{12}, r_{11}). \end{cases}$$

Se invece  $r_{33} = -1$ , allora  $\cos \theta = -1$ , dunque o  $\theta = \pi$  oppure  $\theta = -\pi$ . In questo caso gli elementi  $r_{11}$  ed  $r_{21}$  valgono, rispettivamente,

$$r_{11} = -\cos(\phi - \psi)r_{21} = r_{12}$$

In tal caso si riesce pertanto a determinare solo

$$\begin{cases} \theta = \pi \vee \theta = -\pi \\ \phi - \psi = \text{atan2}(r_{21}, r_{11}) = \text{atan2}(r_{12}, r_{11}). \end{cases}$$

Riassumendo, si consideri la funzione  $\rho$  che associa ad ogni terna di angoli di Eulero  $(\phi, \theta, \psi)$  tali che  $-\pi < \phi, \theta, \psi \leq \pi$ , la matrice di  $R \in SO_3$  tale che  $R = \text{Rot}(z, \psi)\text{Rot}(y, \theta)\text{Rot}(z, \phi)$ . Allora se  $\theta \neq 0$  e  $\theta \neq \pi$ ,  $\rho$  è iniettiva, mentre nel caso in cui  $\theta = 0$  la funzione  $\rho$  associa ogni elemento dell'insieme  $A_k = \{(\phi, 0, \psi) : \phi + \psi = k \in \mathbb{R}\}$  un'unica matrice di  $SO_3$ . Analogamente per  $\theta = \pi$ ,  $\rho$  associa ogni elemento dell'insieme  $B_k = \{(\phi, 0, \psi) : \phi - \psi = k\}$  un'unica matrice di  $SO_3$ .

**Dagli angoli di Eulero ai quaternioni** È possibile convertire la terna  $(\phi, \theta, \psi)$  ed, in particolare, la rotazione ad essa associata, all'operatore  $L_q$  definito nell'equazione (1). Si utilizzerà, per semplicità di calcolo, la convenzione XYZ (ovvero i tre angoli  $(\phi, \theta, \psi)$  si riferiscono rispettivamente all'asse  $\vec{X}$ ,  $\vec{Y}$  e  $\vec{Z}$ ). Questa convenzione, detta anche angoli di Tait-Bryan, è spesso usata per descrivere dinamiche di volo. Si calcola la matrice  $A$  generata dalla rotazione  $(\phi, \theta, \psi)$

$$\begin{aligned} A &= R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & a_{1,1} & a_{1,2} \\ \cos \theta \sin \psi & a_{2,1} & a_{2,2} \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= -\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi, \\ a_{1,2} &= \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi, \\ a_{2,1} &= \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi, \\ a_{2,2} &= -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi. \end{aligned}$$

Da questa, è possibile ricondurci alla coppia di quaternioni unitari associata alla matrice di una rotazione, grazie all'equazione 8 e seguenti, con cui si ottiene che

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \pm \begin{pmatrix} \cos(\psi/2) \\ 0 \\ 0 \\ \sin(\psi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ 0 \\ \sin(\theta/2) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi/2) \\ \sin(\phi/2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\phi/2) \cos(\theta/2) \cos(\psi/2) + \sin(\phi/2) \sin(\theta/2) \sin(\psi/2) \\ \sin(\phi/2) \cos(\theta/2) \cos(\psi/2) - \cos(\phi/2) \sin(\theta/2) \sin(\psi/2) \\ \cos(\phi/2) \sin(\theta/2) \cos(\psi/2) + \sin(\phi/2) \cos(\theta/2) \sin(\psi/2) \\ \cos(\phi/2) \cos(\theta/2) \sin(\psi/2) - \sin(\phi/2) \sin(\theta/2) \cos(\psi/2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## 4 Visualizzare l'azione dei quaternioni unitari

Per comprendere in che modo i quaternioni unitari, che formano una ipersfera di raggio unitario nello spazio quadridimensionale, agiscono nello spazio  $3D$ ,

è utile introdurre la *proiezione stereografica*, strumento che relaziona uno spazio n-dimensionale ad uno spazio (n-1)-dimensionale.

## 4.1 La proiezione stereografica

**Definizione e proprietà** Consideriamo la sfera in  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbb{S} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Si definisce *proiezione stereografica dal polo nord sul piano equatoriale*, che identifichiamo con  $\mathbb{R}^2$ , l'applicazione:

$$f : \mathbb{S} - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

tale che se  $P$  è un punto di  $\mathbb{S}$  allora  $N, P, f(P)$  sono allineati. In seguito si calcola l'espressione di  $\tilde{P} = f(P)$ . Se  $\tilde{P} = (u, v, w)$  è un punto allineato con  $N$  e  $P = (x, y, z)$  si ha che

$$\tilde{P} = \lambda N + (1 - \lambda)P \quad (11)$$

per un opportuno reale  $\lambda$ .

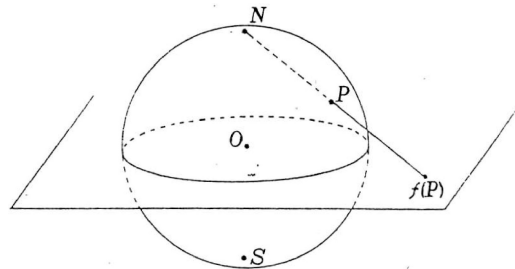


Figura 4

Imponendo che  $\tilde{P}$  appartenga al piano  $z = 0$  ed esplicitando l'equazione (11) si ha

$$\begin{aligned} u &= \lambda \cdot 0 + (1 - \lambda)x = (1 - \lambda)x \\ v &= \lambda \cdot 0 + (1 - \lambda)y = (1 - \lambda)y \\ 0 &= w = \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda)z \end{aligned}$$

Dall'ultima uguaglianza si ottiene che  $\lambda = \frac{z}{1-z}$  e sostituendo nelle prime due si ha che  $f : (x, y, z) \rightarrow (u, v)$  dove

$$u = \frac{x}{1-z} \quad \text{e} \quad v = \frac{y}{1-z} \quad (12)$$

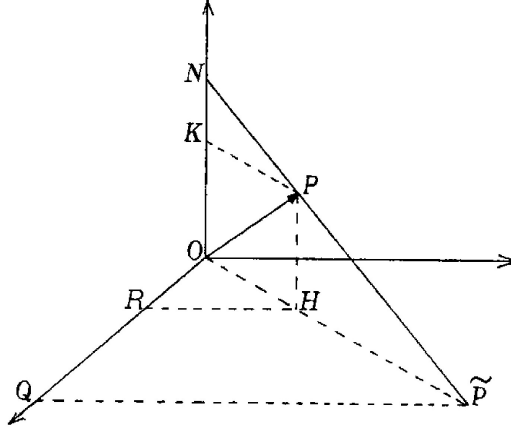


Figura 5

Si noti che si può ottenere lo stesso risultato osservando che (vedi figura 5)

$$u : x = v : y = O\tilde{P} : OH = ON : NK = 1 : (1 - z)$$

per la similitudine dei triangoli  $ON\tilde{P}$  e  $NKP$  e tra i triangoli  $OQ\tilde{P}$  e  $ORH$ . Se sostituiamo le espressioni 12 in  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  si hanno

$$\begin{cases} x = \frac{2u}{u^2+v^2+1} \\ y = \frac{2v}{u^2+v^2+1} \\ z = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \end{cases} \quad (13)$$

che possono essere considerate equazioni parametriche razionali della sfera. Le equazioni precedenti individuano trasformazioni quadratiche.

**Proposizione 4.1.** *La proiezione stereografica trasforma circonferenze della sfera in circonferenze o rette del piano equatoriale.*

*Dimostrazione.* Sia  $C$  una circonferenza della sfera con rappresentazione analitica

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Sostituendo le espressioni trovate per  $x, y, z$  nella seconda delle 14, si ottiene

$$2au + 2bv + c(u^2 + v^2 - 1) + d(u^2 + v^2 + 1) = 0$$

che può essere riscritta

$$(c + d)(u^2 + v^2) + 2au + 2bv + d - c = 0. \quad (15)$$

Osserviamo che il piano di equazione  $ax + by + cz + d = 0$  passa per il polo nord se e solo se  $d = -c$ . Ne segue che se il piano non passa per  $N$  la 15 è l'equazione di una circonferenza del piano equatoriale, altrimenti è l'equazione di una retta.  $\square$

**Osservazione.** Si può vedere che  $f^{-1}$ , la cui espressione è data ovviamente dalle 13, trasforma circonferenze del piano equatoriale in circonferenze della sfera. Infatti, dato  $\tilde{C}$  nel piano equatoriale, di equazione

$$u^2 + v^2 + 2au + 2bv + d = 0;$$

tenendo conto delle 12 si ha

$$\frac{x^2}{(1-z)^2} + \frac{y^2}{(1-z)^2} + \frac{2ax}{1-z} + \frac{2by}{1-z} + d = 0$$

che può scriversi

$$x^2 + y^2 + 2ax(1-z) + 2by(1-z) + d(1-z)^2 = 0$$

che è l'equazione del cono di vertice  $N$  passante per  $\tilde{C}$

Le coordinate dei punti appartenenti all'intersezione di tale cono con  $\mathbb{S}$  sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2ax(1-z) + 2by(1-z) + d(1-z)^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$$

che può essere scritto

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2ax(1-z) + 2by(1-z) + d(1-z)^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = (1-z)(1+z) \end{cases}$$

il sistema precedente è equivalente ai seguenti sistemi

$$\begin{cases} 1-z=0; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 1+z+2ax+2by+d(1-z)=0; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

il primo ha come soluzione  $N$  contato due volte, mentre il secondo individua una circonferenza di  $\mathbb{S}$ .

**Proposizione 4.2.** La proiezione stereografica è conforme (i.e. conserva gli angoli).

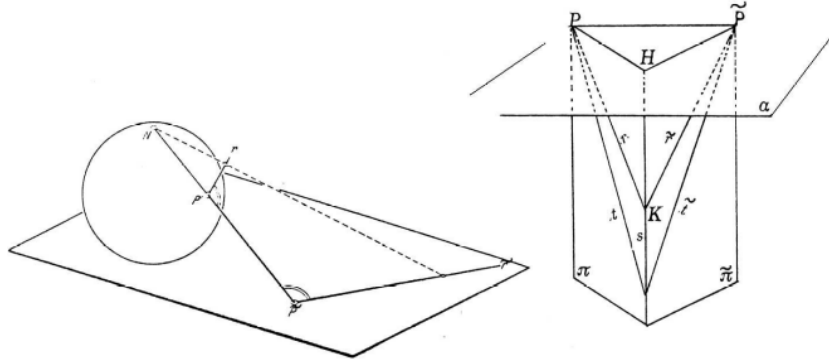


Figura 6

*Dimostrazione.* Sia  $P$  un punto di  $\mathbb{S}$  diverso dal polo nord e sia  $\tilde{P}$  l'immagine di  $P$  tramite la proiezione stereografica. Premettiamo che il piano  $\nu$ , tangente ad  $\mathbb{S}$  nel polo nord, ed il piano  $\pi$  tangente a  $\mathbb{S}$  in  $P$ , formano angoli uguali con la retta passante per  $NP$ . Inoltre  $\nu \cap \pi$  è una retta perpendicolare a  $NP$ . Naturalmente, poiché il piano  $\tilde{\pi}$  su cui proiettiamo è parallelo a  $\nu$ , si ha che  $\pi$  e  $\tilde{\pi}$  formano angoli uguali con la retta passante per  $P\tilde{P}$ .

Quindi chiamando  $\alpha$  il piano ortogonale a  $s = \pi \cap \tilde{\pi}$  e passante per  $P\tilde{P}$ , risulta  $\widehat{HPP} = \widehat{H\tilde{P}P}$ .

Se  $r$  e  $\tilde{r}$  sono due rette ottenute intersecando  $\pi$  e  $\tilde{\pi}$  con un piano passante per  $P\tilde{P}$ , risulta  $\widehat{HPP} = \widehat{H\tilde{P}P}$ .

Se  $r$  e  $\tilde{r}$  sono due rette ottenute intersecando  $\pi$  e  $\tilde{\pi}$  con un piano passante per  $P\tilde{P}$  si ha anche  $\widehat{\tilde{P}PK} = \widehat{K\tilde{P}P}$ . Da qui segue che  $r$  è una retta tangente a  $\mathbb{S}$  in  $P$  e  $\tilde{r}$  è l'immagine di  $r$  secondo la proiezione stereografica, allora  $r$  e  $\tilde{r}$  formano angoli uguali a  $P\tilde{P}$ . Se  $t$  è un'altra tangente alla sfera in  $P$  e  $\tilde{t}$  è la sua immagine, allora  $\widehat{rt} = \widehat{\tilde{r}\tilde{t}}$ .  $\square$

**Generalizzazione in  $n$  dimensioni** Come nel caso della sfera di  $\mathbb{R}^3$  possiamo definire in  $\mathbb{R}^{n+1}$  la proiezione stereografica dal polo nord di  $\mathbb{S}^n$ . identifichiamo  $\mathbb{R}^{n+1}$  con  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Allora possiamo pensare un punto di  $\mathbb{R}^{n+1}$  come una coppia  $(\xi, \eta)$  con  $\xi \in \mathbb{R}^n$  e  $\eta \in \mathbb{R}$ . Un punto  $P = (\xi, \eta)$  appartiene a  $\mathbb{S}^n$  se e solo se  $\|\xi\|^2 + \eta^2 = 1$ .

Si chiama proiezione stereografica dal polo nord l'applicazione

$$f : \mathbb{S}^n - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$$



tale che  $N, P, f(P)$  siano allineati per ogni  $P \in \mathbb{S}^n - N$ . Segue l'espressione. Se  $Q$  è un punto allineato con  $N = (0, 1)$  e  $P = (\xi, \eta)$  si ha

$$Q = \lambda N + (1 - \lambda)P.$$

Imponendo che  $Q$  appartenga a  $\mathbb{R}^n$  si ha  $Q = (\tilde{\xi}, 0)$ , cioè

$$\tilde{\xi} = \lambda \cdot 0 + (1 - \lambda)\xi = (1 - \lambda)\xi; \quad 0 = \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda)\eta.$$

Dall'ultima si ottiene  $\lambda = \frac{\eta}{\eta-1}$  e quindi

$$f : (\xi, \eta) \mapsto \frac{1}{1 - \eta}\xi.$$

Si vede poi che

$$f^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n, \xi' \mapsto \left( \frac{2\xi'}{\|\xi'\|^2 + 1}, \frac{\|\xi'\|^2 - 1}{\|\xi'\|^2 + 1} \right).$$

Infatti, posto  $\xi' = \frac{\xi}{1-\eta}$ , si ha  $\xi = \xi'(1 - \eta)$  e quindi  $\|\xi\|^2 = \|\xi'\|^2(1 - \eta)^2$ .

Ma  $\|\xi\|^2 + \eta^2 = 1$ , dunque

$$\eta^2(\|\xi'\|^2 + 1) - 2\eta\|\xi'\|^2 + \|\xi'\|^2(1 - \eta)^2 - 1 = 0$$

da cui, risolvendo l'equazione, si ha  $\eta = 1$  o  $\eta = \frac{\|\xi'\|^2 - 1}{\|\xi'\|^2 + 1}$ . La soluzione  $\eta = 1$  si esclude, dunque si ha la tesi.

**Osservazione.** Se  $P$  è un punto di  $\mathbb{S}^n$  ed  $H$  un iperpiano parallelo all'iperpiano tangente a  $\mathbb{S}^n$  in  $P$  e differente da questo iperpiano, si chiama proiezione stereografica di  $\mathbb{S}^n$  l'applicazione

$$f : \mathbb{S}^n - \{P\} \rightarrow H$$

tale che se  $Q \in \mathbb{S} - \{P\}$ ,  $P, Q, f(Q)$  sono allineati.

Usualmente si considera  $H$  passante per il centro, oppure nel punto antipodale a  $P$ .

Si può dimostrare che ogni proiezione stereografica conserva gli angoli e trasforma le  $(n - 1)$ -sfere in  $\mathbb{S}^n - P$  in sfere di  $H$ . Si è visto le precedenti affermazioni in  $n = 2$ .

## 4.2 Visualizzare l'azione dei quaternioni tramite la proiezione stereografica

Si tenta di visualizzare l'insieme dei quaternioni unitari attraverso l'utilizzo della proiezione stereografica. Come si è visto, la proiezione stereografica permette di mettere in biezione l'ipersfera quadridimensionale di raggio 1, con lo spazio tridimensionale (ad eccezione del polo che possiamo immaginare proiettato ad infinito). Si considera la proiezione stereografica nell'iperpiano parallelo all'iperpiano tangente nel punto  $(-1, 0, 0, 0)$ , *passante per l'origine*. L'iperpiano sarà descritto dalle tre componenti  $i, j, k$ .

Dunque, l'iperpiano, sezionerà una sfera unitaria dell'ipersfera che sarà fissata dalla proiezione stereografica. Vi è una analogia al caso  $n = 2$ : infatti la proiezione di una sfera nel piano passante per l'origine, fissa l'equatore.

In particolare

- Gli elementi con componente reale nulla, rappresentano la sfera unitaria che è lasciata invariata dalla proiezione.
- Gli elementi con componente reale positiva sono proiettati all'interno della sfera invariata.
- Gli elementi con componente reale negativa sono proiettati all'esterno della sfera invariata.

Anche in questo caso, l'analogia con  $n = 2$  è evidente, infatti la calotta superiore della sfera è proiettata nel cerchio definito dall'equatore, la calotta inferiore della sfera è proiettata all'esterno dell'equatore.

Si consideri adesso una sfera passante per il punto  $(-1, 0, 0, 0)$ , ad esempio la sfera passante per  $1, i, j, -1, -i, -j$ .

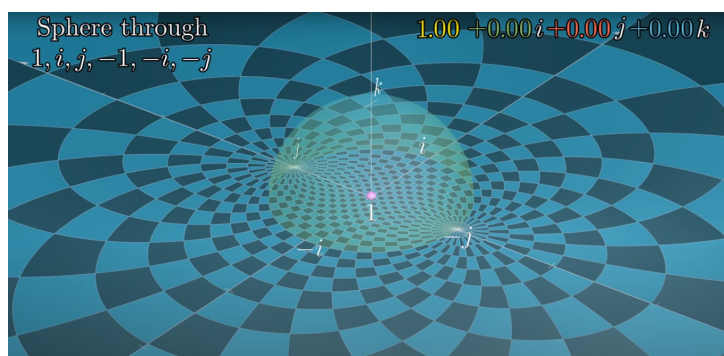


Figura 7

Come si vede in figura 7, la sfera è proiettata sul piano  $ij$ . L'analogo con  $n = 2$ , è la circonferenza passante per  $1, i, -1, -i$  che è proiettata (così come

dimostrato in 4.1 ) nella retta data dall'intersezione del piano contenente la circonferenza e del piano su cui proietti (figura 8).

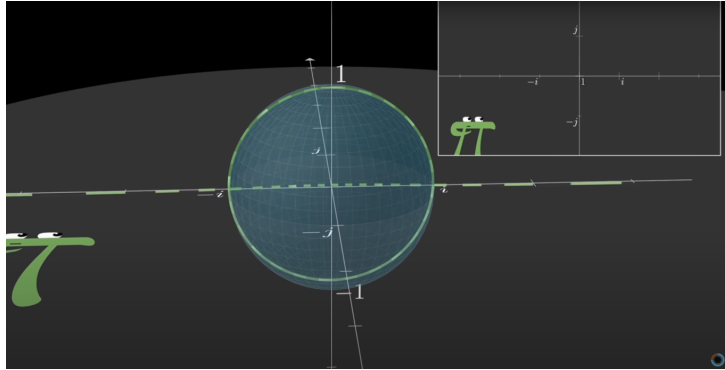


Figura 8

Si tenta, in seguito, di visualizzare l'azione di un quaternion unitario  $q$  su un quaternion puro  $p$  (che rappresenta un punto). Per descrivere come un operatore lineare agisce in uno spazio vettoriale, è sufficiente descriverlo in una sua base.

Si consideri ad esempio la moltiplicazione per  $q = i$ . Si consideri la circonferenza passante per  $i, 1, -i, -1$ . Sappiamo per 4.1 che la circonferenza è proiettata nel piano come una retta, dunque si riesce a visualizzare in che modo i punti della retta sono mossi dalla moltiplicazione (figura 9). L'operatore

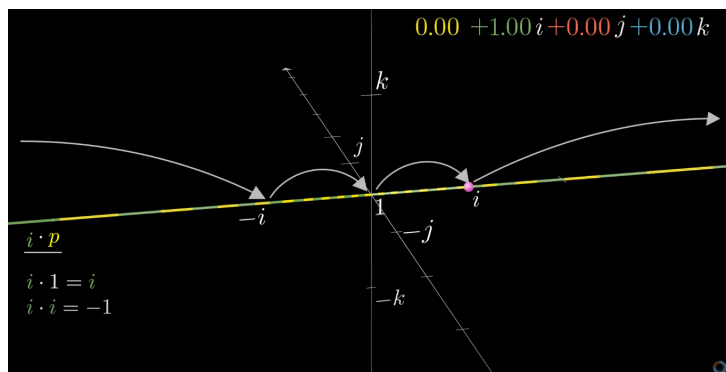


Figura 9

$q = i$  inoltre agisce sulla circonferenza passante per  $j, k, -j, -k$  (circonferenze risultano perpendicolari nello spazio quadridimensionale) nel classico modo, ovvero ruotandolo di  $\pi/2$  in senso antiorario (considerando lo spazio destrorso). Si calcola adesso, l'azione ripetuta del quaternion unitario  $q = i$  sulla sfera unitaria passante per  $i, j, k, -i, -j, -k$ . L'azione, che avviene nella

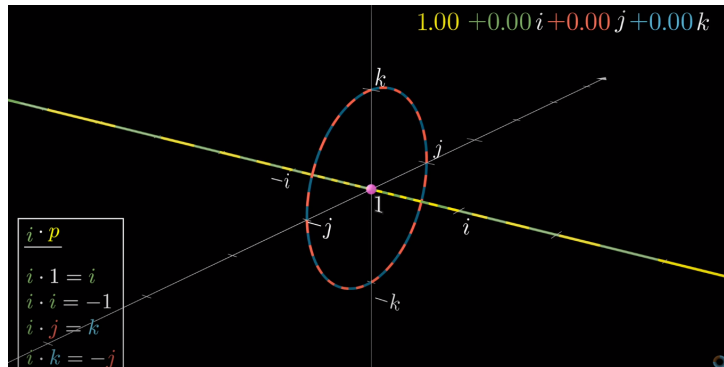


Figura 10

quadrimensionalità, manda la sfera in una passante per  $-1$ , che come sappiamo viene proiettata in un piano. In questo caso, la sfera viene trasformata nel piano perpendicolare ad  $i$ , passante per l'origine. Operando ulteriormente, il piano è trasformato nella stessa sfera invertita e, successivamente, di nuovo nel piano.

Moltiplicare per elementi con parte reale non nulla, produce trasformazioni che possono dilatare la sfera e spostarne il centro, come in figura 11. Questi ragionamenti sono analoghi per elementi con componenti non nulli

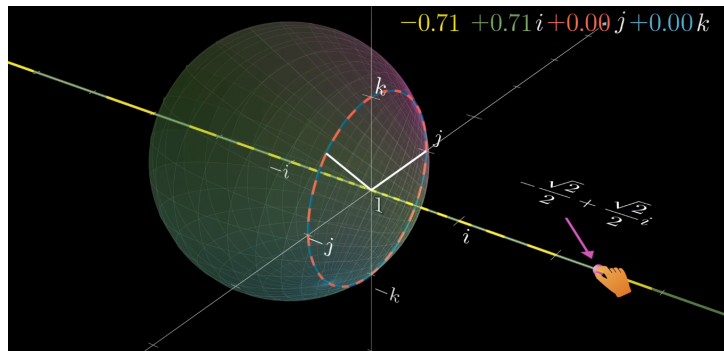


Figura 11

di  $j$  o  $k$ . Infatti, una volta tracciato l'asse di rotazione, che coincide con la retta passante per il quaternion e l'origine, si traccia la circonferenza perpendicolare all'asse e si ragiona in modo analogo.

Per ottenere delle rotazioni però, come già visto algebricamente nella sezione 2, è necessario moltiplicare a destra per l'inverso dell'elemento. Questo permette di annullare la traslazione del centro e la dilatazione della sfera, raddoppiando l'angolo di rotazione, che avviene perpendicolarmente all'asse di rotazione. L'angolo raddoppia perché l'elemento inverso agisce a destra,

dunque produce una rotazione di angolo opposto (dato dall'inverso) orientato in modo opposto (dato dalla moltiplicazione a destra), il che genera la stessa rotazione del primo elemento moltiplicato a sinistra.

## Riferimenti bibliografici

- [1] Princeton Series in Applied Mathematics Leiba Rodman, *Topics in Quaternion Linear Algebra-Princeton*, University Press, (2014)
- [2] Wai Kiu Chan, *Arithmetic of Quaternion Algebra*, 2012
- [3] K. Shoemake, *Animating rotations with quaternion curves*, 1985
- [4] Jack B. Kuipers, *Quaternions and rotation sequences primer with applications to orbits, aerospace, and virtual reality*, Princeton University Press, 1999