



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE

---

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

**Teoria descrittiva della complessità: la logica  $FP+C$   
cattura Ptime nella classe dei grafi ad intervallo**

**RELATORE**  
Prof.ssa Giovanna D'Agostino

**STUDENTE**  
Cristian Curaba

---

Anno Accademico 2021/2022

## Sommario

Nella teoria descrittiva della complessità determinare l'esistenza di una logica che catturi i problemi polinomiali è una questione notevole ancora aperta. Nel seguente elaborato presenterò dettagliatamente le definizioni necessarie ad inquadrare la questione. Percorrerò la costruzione della logica a punti fissi e quella a punti fissi con contatore, presentando semplici esempi che ne risaltano la loro capacità espressiva. In seguito evidenzierò i più importanti risultati di tali logiche (accennando anche ai risultati di inespressività). Infine introdurrò la dimostrazione, dovuta a Bastian Laubner, secondo cui la logica a punti fissi con contatore permette di catturare i problemi polinomiali nella classe dei grafi ad intervallo.

# Indice

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Definizioni introduttive</b>                             | <b>4</b>  |
| <b>2</b> | <b>Logiche a punti fissi e a punti fissi con contatori</b>  | <b>7</b>  |
| 2.1      | Punti fissi di operatori . . . . .                          | 7         |
| 2.2      | Logiche con punti fissi . . . . .                           | 8         |
| 2.3      | Proprietà di LFP e IFP . . . . .                            | 13        |
| 2.4      | Logica con contatore . . . . .                              | 16        |
| <b>3</b> | <b>L'espressività di FP e FP+C</b>                          | <b>17</b> |
| 3.1      | Il potere espressivo delle logiche a punti fissi . . . . .  | 17        |
| 3.2      | La necessità di FP+C . . . . .                              | 20        |
| <b>4</b> | <b>Catturare Ptime nella classe dei grafi ad intervallo</b> | <b>22</b> |
| 4.1      | Introduzione . . . . .                                      | 22        |
| 4.2      | Definizioni e proprietà . . . . .                           | 23        |
| 4.3      | La logica FP+C e il concetto di canonizzazione . . . . .    | 25        |
| 4.4      | Risultati di inesprimibilità di FP+C . . . . .              | 26        |
| 4.5      | Canonizzazione definibile in FP+C . . . . .                 | 29        |

## Introduzione

La teoria descrittiva della complessità si pone l'obiettivo di trovare relazioni tra classi di complessità e logiche, intersecando quindi sia la teoria della complessità computazionale che la teoria dei modelli finiti. Questo ramo di ricerca ha fornito ulteriori strumenti dimostrativi, puntualizzando l'esistenza di una difficoltà intrinseca nei problemi algoritmici. Prendiamo un noto problema decisionale NP-completo: la verifica dell'esistenza di un ciclo hamiltoniano. Tale interrogazione nella classe dei grafi finiti non è esprimibile in FO, tuttavia esiste una sua generalizzazione, la logica esistenziale al second'ordine  $\exists SO$ , con la quale il problema risulta esprimibile. Infatti, un grafo è hamiltoniano (cioè ammette un ciclo hamiltoniano) se esiste un ordine lineare dei suoi vertici per cui ogni nodo è adiacente al successivo e vi è un arco tra il primo e ultimo nodo. Tale proprietà è esprimibile quantificando esistenzialmente su relazioni binarie, cosa possibile in  $\exists SO$ . L'idea che sta alla base della teoria della complessità descrittiva è che la complessità computazionale di un problema cresce all'aumentare della difficoltà di descrivere istanze del problema tramite un linguaggio logico, e viceversa.

Molta ricerca è stata dedicata al tentativo di caratterizzare logicamente la classe Ptime, ovvero trovare una logica L tale che ogni problema in Ptime possa essere descritto da una formula di L e ogni formula di L possa essere verificata in tempo polinomiale su strutture finite, cioè trovare una logica che catturi Ptime. Il primo risultato notevole ottenuto, con il quale nasce la teoria della complessità descrittiva, è il Teorema di Fagin, il quale dimostra che la logica  $\exists SO$  cattura la classe di complessità NP. D'altra parte, la Congettura di Gurevich ([18]) afferma che non esistano logiche che catturino Ptime. Una dimostrazione di tale risultato implicherebbe che  $P \neq NP$  (il viceversa non è vero, si veda [19]). Nonostante ciò, sono state costruite generalizzazioni della logica FO in grado di catturare Ptime su importanti classi di grafi, come la logica a punti fissi e la logica a punti fissi con contatori.

L'obiettivo di questo elaborato è quello di formalizzare gli elementi fondamentali della teoria descrittiva della complessità, definire la logica  $FP+C$  comprendendo capacità e limiti della sua espressività e infine evidenziare le idee dimostrative del risultato di Laubner, spiegando con esempi e dettagli le costruzioni necessarie per la comprensione del suo articolo e lasciando la possibilità al lettore interessato di rivolgersi all'articolo [1] per la dimostrazione completa.

# 1 Definizioni introduttive

Nel seguente elaborato daremo per note le nozioni classiche di complessità computazionale (macchine di Turing, classi di complessità) e le nozioni di base sulla logica al primo ordine e la teoria dei modelli.

In teoria descrittiva della complessità i problemi algoritmici sono visti come *interrogazioni booleane*.

**Definizione 1.1.** *Una interrogazione booleana è una classe di strutture finite, di uno stesso vocabolario, che sia chiusa per isomorfismo.*

In seguito, non distingueremo fra classi di strutture finite ed interrogazioni booleane, in quanto assumeremo sempre la chiusura per isomorfismo. Inoltre, in tutto l'elaborato, ci soffermeremo esclusivamente su strutture finite e, come spesso accade nella teoria dei modelli finiti, tutti i vocabolari considerati saranno relazionali finiti, cioè conterranno solo un numero finito di simboli relazionali e di costanti.

In questa parte introduttiva vogliamo dare una rigorosa definizione all'affermazione "Logica che cattura Ptime".

Per parlare di complessità di logiche abbiamo la necessità di utilizzare modelli computazionali. Noi useremo le Macchine di Turing. Per far ciò, dobbiamo riuscire a codificare strutture in stringhe (ordinate).

Dato un vocabolario  $\tau$ , denotiamo con  $\text{Ord}(\tau)$  la classe di tutte le strutture finite  $(\mathfrak{A}, <)$ , dove  $\mathfrak{A}$  è una  $\tau$ -struttura e  $<$  è interpretato come un ordine lineare sul dominio<sup>1</sup>. Inoltre denotiamo con  $\Sigma$  un alfabeto (noi lavoreremo con  $\Sigma = \{0, 1\}$ ) e  $\Sigma^*$  l'insieme delle stringhe finite sull'alfabeto  $\Sigma$ . Per ogni struttura  $\mathfrak{A} \in \text{Ord}(\tau)$  con dominio di cardinalità  $n$  e per ogni fissato  $k$ , possiamo identificare  $A^k$  con l'insieme  $\{0, 1, \dots, n^k - 1\}$ . Questo si realizza associando ad ogni  $k$ -tupla  $\vec{a}$  la posizione che assume nell'ordine lessicografico indotto da  $<$  su  $A^k$ .

**Definizione 1.2.** *Una codifica è una funzione  $\text{enc} : \text{Ord}(\tau) \rightarrow \Sigma^*$  che soddisfa le seguenti condizioni:*

- $\text{enc}(\mathfrak{A}, <) = \text{enc}(\mathfrak{B}, <)$  se e solo se  $(\mathfrak{A}, <) \cong (\mathfrak{B}, <)$ ;
- esiste un fissato polinomio  $p$  tale che  $|\text{enc}(\mathfrak{A}, <)| \leq p(|A|)$  per ogni  $(\mathfrak{A}, <) \in \text{Ord}(\tau)$ ;
- per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e per ogni  $\sigma \in \Sigma$  esiste una FO-formula  $\beta_\sigma(x_1, \dots, x_k)$  di vocabolario  $\tau \cup \{<\}$  tale che per ogni  $(\mathfrak{A}, <)$  e per ogni  $\vec{a} \in A^k$  vale che

$$(\mathfrak{A}, <) \models \beta_\sigma(\vec{a}) \text{ se e solo se l' } \vec{a}\text{-esimo simbolo di } \text{enc}(\mathfrak{A}, <) \text{ è } \sigma;$$

- dati  $\text{enc}(\mathfrak{A}, <)$ , un simbolo relazionale  $R$  di  $\tau$  e una tupla  $\vec{a}$  allora è possibile decidere efficientemente se  $\mathfrak{A} \models R(\vec{a})$ .

Il significato di "efficientemente" nell'ultima condizione può dipendere dal contesto. In seguito presenteremo una codifica per strutture finite che valuta  $\mathfrak{A} \models R(\vec{a})$  in tempo polinomiale sulla cardinalità del dominio di  $\mathfrak{A}$  (si veda la Proposizione 3.1).

Sia  $\mathfrak{A}$  una struttura con dominio  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  su un fissato vocabolario  $\tau$ . Quora non vi sia un ordine nella struttura, ne sceglieremo uno arbitrariamente. L'ordine

<sup>1</sup>Nel seguito la parola "ordine" verrà usata come sinonimo di ordine lineare

non avrà effetti sul risultato dell'interrogazione ma è comunque necessario per codificare la struttura su un nastro di una macchina di Turing. Supponiamo quindi che  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . Ogni relazione  $k$ -aria  $R^{\mathfrak{A}}$  sarà codificata da un stringa  $\text{enc}_{<}(R^{\mathfrak{A}})$  di  $n^k$  bit come segue. Consideriamo una enumerazione di tutte le  $k$ -tuple su  $A$  in ordine lessicografico, cioè  $(a_1, \dots, a_1), (a_1, \dots, a_1, a_2), \dots, (a_n, \dots, a_n, a_{n-1}), (a_n, \dots, a_n)$ . Sia  $\vec{a}_j$  la  $j$ -esima tupla di tale enumerazione. Allora il  $j$ -esimo bit di  $\text{enc}_{<}(R^{\mathfrak{A}})$  è 1 se  $\vec{a}_j \in R^{\mathfrak{A}}$  e 0 altrimenti. Possiamo assumere, senza perdita di generalità, che  $\tau$  contenga solo simboli relazionali, in quanto una costante può essere codificata come una relazione unaria contenente un elemento.

Se  $\tau = \{R_1, \dots, R_p\}$  allora la codifica  $\text{enc}_{<}(\mathfrak{A})$  della struttura è la concatenazione delle codifiche delle relazioni, a cui si antepone una successione di zeri lunga quanto la dimensione della struttura seguita da un 1:

$$0^n 1 \cdot \text{enc}_{<}(R_1^{\mathfrak{A}}) \cdots \text{enc}_{<}(R_p^{\mathfrak{A}}).$$

La lunghezza di tale stringa, denotata con  $|\mathfrak{A}|$ , è polinomiale in  $n$ ; più precisamente, denotando con  $k_i$  l'arietà del simbolo relazionale  $R_i$  si ha:

$$|\mathfrak{A}| = (n + 1) + \sum_{i=1}^p n^{k_i}.$$

Chiarita la codifica di strutture, possiamo dare una definizione rigorosa di classe di strutture in Ptime.

**Definizione 1.3.** *Sia  $\mathcal{J}$  una classe di strutture ordinate su un fissato vocabolario. Diciamo che  $\mathcal{J}$  è in Ptime (in simboli,  $\mathcal{J} \in \text{Ptime}$ ) se e solo se esiste una macchina di Turing  $M$  deterministica ed un polinomio  $p(x) \in \mathbb{N}[x]$  tale che  $M$  accetta  $\mathcal{J}$  (cioè per ogni struttura ordinata  $\mathfrak{B}$  vale che  $\mathfrak{B} \in \mathcal{J}$  se e solo se  $M$  accetta  $\text{enc}(\mathfrak{B})$ ) e le computazioni di  $M$  sono limitate temporalmente da  $p(n)$ , con  $n$  la dimensione dell'input.*

Come già osservato, per codificare una struttura non ordinata si fa uso di un ordine arbitrario. Possiamo dunque generalizzare la definizione precedente a classi di strutture anche non ordinate.

**Definizione 1.4.** *Per una classe  $\mathcal{K}$  di strutture, denotiamo con  $\mathcal{K}_{<}$  la classe delle sue rappresentazioni ordinate, cioè*

$$\mathcal{K}_{<} = \{(\mathfrak{A}, <) \mid \mathfrak{A} \in \mathcal{K}, < \text{ è un ordine di } \mathfrak{A}\}.$$

**Definizione 1.5.** *Una classe di strutture  $\mathcal{K}$  (non necessariamente ordinate) è in Ptime se e solo se  $\mathcal{K}_{<} \in \text{Ptime}$ .*

**Osservazione.** *Qualora  $\mathcal{J}$  sia una classe di strutture ordinate, la definizione qui sopra è coerente con quella presentata in 1.3, vale cioè*

$$\mathcal{J}_{<} \in \text{Ptime} \iff \mathcal{J} \in \text{Ptime} \text{ come classe di strutture ordinate.}$$

È sufficiente notare che se  $<, <'$  sono ordini lineari su una  $\tau$ -struttura  $\mathfrak{A}$  possiamo computare in tempo polinomiale  $\text{enc}(\mathfrak{A}, <')$  a partire da  $\text{enc}(\mathfrak{A}, <)$ . Ne segue che: esiste  $M$  che lavora in tempo polinomiale e che accetta  $\text{enc}(\mathfrak{A}, <)$  se e solo se esiste  $M'$  che lavora in tempo polinomiale e accetta  $\text{enc}(\mathfrak{A}, <')$ , da cui segue l'osservazione.

La Definizione 1.5 ammette generalizzazioni ad altre classi di complessità nel modo ovvio. Questo ci permette di catalogare interrogazioni booleane in termini di complessità computazionale.

Un altro modo per classificare interrogazioni booleane si realizza considerando linguaggi logici adatti a descrivere le interrogazioni. Per le successive costruzioni, è fondamentale comprendere precisamente cosa si intenda per "logica". Siamo interessati a lavorare con delle logiche naturali, cioè logiche che abbiano una sintassi effettiva ed una semantica invariante per isomorfismo. Diamo una definizione formale di questo concetto.

**Definizione 1.6.** *Una logica<sup>2</sup>  $L$  consiste di:*

- *un insieme decidibile  $L[\tau]$  di elementi, detti  $L$ -formule, per ogni vocabolario  $\tau$ ;*
- *una relazione binaria  $\models$  tra strutture finite e  $L$ -formule tale che per ogni vocabolario  $\tau$  e per ogni  $\varphi \in L[\tau]$ , la classe  $\mathcal{K}_\varphi$  di tutte le  $\tau$ -strutture  $A$  con  $A \models \varphi$  sia chiusa per isomorfismo.*

Dunque per ogni  $L$ -formula  $\varphi$ , la classe  $\mathcal{K}_\varphi$  è una interrogazione booleana.

**Definizione 1.7.** *Una interrogazione booleana è definibile in  $L$  se è definita da qualche  $L$ -formula.*

Possiamo adesso dare una definizione rigorosa di "logica cattura Ptime su una classe di strutture". Le idee che formalizzeremo nella definizione a seguire sono due:

- tutti i problemi polinomiali devono essere definibili nella logica;
- decidere una formula è un problema di complessità polinomiale (rispetto alla dimensione della struttura in input).

**Definizione 1.8.** *Sia  $\mathcal{K}$  una classe chiusa per isomorfismo di strutture finite. Una logica  $L$  cattura Ptime su  $\mathcal{K}$  se per ogni vocabolario  $\tau$ :*

- *ogni interrogazione booleana che è decidibile in tempo polinomiale è definibile in  $L$ ;*
- *esiste una funzione computabile che associa ad ogni  $L$ -formula  $\varphi \in L[\tau]$  un polinomio  $p(x)$  ed un algoritmo  $M$  tale che  $M$  decide l'interrogazione  $\mathcal{K}_\varphi$  in tempo  $p(n)$ , con  $n$  la dimensione della struttura in input.*

Questa definizione può facilmente essere estesa (nel modo ovvio) ad altre classi di complessità.

Notiamo come la seconda richiesta nella Definizione 1.8 sia soddisfatta dalla logica al primo ordine e da tutte le logiche più utilizzate. Vedremo più avanti che, lasciando cadere questa richiesta, non sia difficile trovare una "logica" che cattura Ptime (Esempio 3.1). Tuttavia una logica che non soddisfa il secondo punto della Definizione 1.8 non è oggetto di interesse nella teoria dei modelli finiti, in quanto l'accento verte sull'aspetto effettivo delle costruzioni.

---

<sup>2</sup>in questa definizione le  $L$ -formule sono considerate prive di variabili libere. Una definizione più rigorosa dovrebbe definire le occorrenze di variabili libere e la semantica per formule con tali occorrenze.

## 2 Logiche a punti fissi e a punti fissi con contatori

In questa sezione introduciamo una estensione della logica al prim'ordine che useremo in seguito per catturare Ptime su particolari classi di strutture (ordinate, grafi ad intervallo). Per definire tali logiche abbiamo bisogno del concetto di punto fisso di un operatore.

### 2.1 Punti fissi di operatori

Sia  $A$  un insieme finito. Chiameremo operatore una qualsiasi funzione  $F: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ .

**Definizione 2.1.** *Definiamo le seguenti proprietà per un operatore  $F$ :*

- Monotono:  $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A) (X \subseteq Y \rightarrow F(X) \subseteq F(Y))$ ;
- Inflazionario:  $\forall X \in \mathcal{P}(A) \quad X \subseteq F(X)$ ;
- Induttivo: *se la successione di insiemi  $X_0 = \emptyset$  e  $X_{n+1} = F(X_n)$  è crescente, cioè per ogni  $n \in \mathbb{N} \quad X_n \subseteq X_{n+1}$ .*

**Definizione 2.2.** *Diciamo che  $X \subseteq A$  è un punto fisso per un operatore  $F$  se  $F(X) = X$ . Inoltre, diciamo che  $X \subseteq A$  è il minimo punto fisso se per ogni punto fisso  $Y \subseteq A$  si ha che  $X \subseteq Y$ ;*

**Notazione.** *Indicheremo con  $\mathit{lfp}(F)$ <sup>3</sup> il minimo punto fisso di  $F$  (quando esiste).*

Notiamo che ogni operatore inflazionario è induttivo. Vale inoltre il seguente:

**Proposizione 2.1.** *Ogni operatore monotono è induttivo*

*Dimostrazione.* Considero la successione di insiemi  $X_0 = \emptyset$  e  $X_{n+1} = F(X_n)$ . Dimostriamo che  $X_n \subseteq X_{n+1}$  per induzione su  $n$ . Il caso base è ovvio, in quanto  $X_0 = \emptyset$ . Supponiamo  $X_i \subseteq X_{i+1}$ . Allora per monotonia  $F(X_i) \subseteq F(X_{i+1})$ , cioè  $X_{i+1} \subseteq X_{i+2}$ . Questo dimostra che  $\forall i \in \mathbb{N} \quad X_i \subseteq X_{i+1}$ .  $\square$

Essendo  $A$  finito, se  $F$  è un operatore induttivo la successione  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  definita sopra si stabilizza definitivamente (diciamo per un certo  $N \in \mathbb{N}$ ). Definiamo dunque

$$X_\infty := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i = X_N.$$

**Teorema 2.1** (Tarski-Knaster). *Ogni operatore monotono  $F: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$  ammette un minimo punto fisso e vale che*

$$\mathit{lfp}(F) = \bigcap \{X \subseteq A : X = F(X)\} = \bigcap \{X \subseteq A : F(X) \subseteq X\}.$$

*Inoltre,  $\mathit{lfp}(F) = X_\infty$ .*

---

<sup>3</sup>la sigla "lfp" nasce dall'inglese "least fixed point"



*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{W} = \{Y \mid F(Y) \subseteq Y\}$ . Ovviamente  $\mathcal{W} \neq \emptyset$  in quanto  $A \in \mathcal{W}$ . Mostriamo che  $S = \bigcap \mathcal{W}$  è un punto fisso per  $F$ . Per ogni  $Y \in \mathcal{W}$  abbiamo che  $S \subseteq Y$  dunque  $F(S) \subseteq F(Y) \subseteq Y$ ; dunque  $F(S) \subseteq \bigcap \mathcal{W} = S$ . D'altra parte siccome  $F(S) \subseteq S$ , abbiamo che  $F(F(S)) \subseteq F(S)$  e dunque  $F(S) \in \mathcal{W}$ . Quindi anche  $S \subseteq F(S)$ . Abbiamo così dimostrato che  $S = F(S)$ .

Sia  $\mathcal{W}' = \{Y \mid Y = F(Y)\}$  e  $S' = \bigcap \mathcal{W}'$ . Allora  $S \in \mathcal{W}'$  e dunque  $S' \subseteq S$ ; d'altra parte  $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$ , da cui  $S \subseteq S'$ . Dunque  $S = S'$ . Quindi anche  $S'$  è un punto fisso per  $F$ , ed essendo l'intersezione di tutti i punti fissi, deve essere il minimo. Dimostriamo che

$$X_\infty = \mathbf{lfp}(F) = \bigcap \{Y \mid Y = F(Y)\} = \bigcap \{Y \mid F(Y) \subseteq Y\}.$$

Vediamo che  $F(X_\infty) = X_\infty$ . Essendo  $F$  induttivo (Proposizione 2.1) sappiamo che esiste  $N \in \mathbb{N}$  per cui  $F(X_N) = X_N$ . Inoltre  $X_N = X_\infty$  da cui  $X_\infty$  è punto fisso per  $F$ . Per dimostrare che  $X_\infty$  sia il più piccolo punto fisso, ci basta dimostrare che  $X_i \subseteq Y$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$  e per ogni  $Y \in \mathcal{W}$ . Dimostriamolo per induzione. Il caso base è ovvio ( $X_0 = \emptyset$ ). Dimostriamo che  $X_{i+1} \subseteq Y$  per ogni  $Y \in \mathcal{W}$ . Sia  $Y$  un generico elemento di  $\mathcal{W}$ . Per ipotesi induttiva  $X_i \subseteq Y$  e per monotonia  $X_{i+1} = F(X_i) \subseteq F(Y) \subseteq Y$ . □

**Definizione 2.3** (Punto fisso inflazionario). *Dato un operatore arbitrario  $G$ , possiamo costruire l'operatore inflazionario  $G_{inf}(Y) = Y \cup G(Y)$ . Poiché l'operatore  $G_{inf}$  è induttivo, la successione  $X_0 = \emptyset$ ,  $X_{n+1} = G_{inf}(X_n)$  si stabilizza. Definiamo il punto fisso inflazionario di  $G$  come  $\mathbf{ifp}(G) := X_\infty = \bigcup X_i$ .<sup>4</sup>*

**Osservazione.** *Se  $F$  è monotono allora  $\mathbf{lfp}(F) = \mathbf{ifp}(F)$ .*

## 2.2 Logiche con punti fissi

In questa sottosezione arricchiremo la logica FO con l'uso operatori a punti fissi. Costruiremo così delle logiche (dette a punti fissi) che estenderanno l'espressività di FO. Avvertiamo che la definizione che daremo della semantica di queste logiche non è del tutto rigorosa (vedi note) ma la adottiamo per evitare di appesantire troppo la scrittura.

**Definizione 2.4.** *Sia  $\varphi(x_1, \dots, x_k, \vec{u}, X, \vec{Y})$  una formula su un vocabolario  $\tau$ , dove la variabile relazionale  $X$  ha arietà  $k$ . Inoltre sia  $\mathfrak{A}$  una  $\tau$ -struttura con dominio  $A$ ,  $\vec{b}$  una interpretazione di  $\vec{u}$  in  $A$  e  $\vec{S}$  una interpretazione di  $\vec{Y}$  su  $A$ . Allora  $\varphi, \mathfrak{A}, \vec{b}$  e  $\vec{S}$  determinano l'operatore  $F_\varphi : \mathcal{P}(A^k) \rightarrow \mathcal{P}(A^k)$  definito da*

$$F_\varphi(R) := \{(a_1, \dots, a_k) \in A^k \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_k, \vec{b}, R, \vec{S}]\},$$

(per semplicità notazionale, abbiamo eliminato il riferimento a  $\mathfrak{A}, \vec{b}$ , e  $\vec{S}$  in  $F_\varphi$ ).

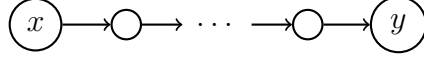
**Notazione.** *Sia  $L$  una logica che vogliamo definire. Useremo la seguente  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \Rightarrow \varphi$  per indicare "se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  sono formule di  $L$  allora  $\varphi$  è una formula di  $L$ ".*

**Definizione 2.5.** [Logica IFP] *Dato un qualsiasi vocabolario  $\tau$ , le formule della logica IFP sono caratterizzate dalla chiusura per le seguenti regole di costruzione:*

- $\Rightarrow \varphi$  dove  $\varphi$  è una formula atomica su  $\tau$ ;

---

<sup>4</sup>la sigla "ifp" nasce dall'inglese "inflationary fixed point".



- $\varphi \Rightarrow \neg\varphi$ ;  $\varphi, \psi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)$ ;  $\varphi \Rightarrow \exists x\varphi$ ;
- $\varphi \Rightarrow [\mathbf{ifp}_{\vec{x}, X}\varphi]\vec{t}$  dove  $\vec{x}$  e  $\vec{t}$  hanno la stessa arietà e  $X$  è una variabile relazionale della stessa arietà.

Gli enunciati sono le formule senza occorrenze di variabili libere al primo e secondo ordine, dove le variabili libere  $\text{free}(\varphi)$  sono definite nel modo usuale, con l'aggiunta di

$$\text{free}([\mathbf{ifp}_{\vec{x}, X}\varphi]\vec{t}) := \text{free}(\vec{t}) \cup (\text{free}(\varphi) \setminus \{\vec{x}, X\}).$$

La semantica per le formule ottenute dall'applicazione della IFP-regola è definita come segue: sia  $X$  variabile relazionale  $k$ -aria, siano le variabili libere di  $[\mathbf{IFP}_{\vec{x}, X}\varphi]\vec{t}$  tra quelle che occorrono in  $\vec{u}$  e  $\vec{Y}$  e siano  $\vec{b}, \vec{S}$  interpretazioni in  $\mathfrak{A}$  rispettivamente di  $\vec{u}$  e  $\vec{Y}$ , allora

$$\mathfrak{A} \models [\mathbf{ifp}_{X, \vec{x}}\varphi]\vec{t}[\vec{b}, \vec{S}] \iff (t_1[\vec{b}], \dots, t_k[\vec{b}]) \in \mathbf{ifp}(F_\varphi),$$

dove anche nell'operatore  $F_\varphi$  le variabili  $\vec{u}, \vec{Y}$  sono interpretate come  $\vec{b}, \vec{S}$  rispettivamente (si veda la Definizione 2.4)<sup>5</sup>.

**Esempio 2.1** (Chiusura transitiva). Sia  $E \subseteq A^2$  una relazione binaria sul dominio di una generica struttura  $\mathfrak{A}$  di un linguaggio  $\mathcal{L} = \{=, E, \dots\}$ , vorremmo trovare una formula  $\psi(x, y)$  tale che  $\mathfrak{A} \models \psi(x, y)$  se e solo se  $x$  e  $y$  appartengono alla chiusura transitiva dell'interpretazione di  $E$  (cioè esiste un cammino finito che collega  $x$  a  $y$ ). Grazie ai giochi di Ehrenfeucht–Fraïssé, si dimostra che  $\psi$  non si può esprimere in FO. Mostriamo invece che in IFP una tale formula si può costruire.

In seguito non distingueremo il simbolo  $E$  dalla sua interpretazione nella struttura  $\mathfrak{A}$ . Considero la formula  $\varphi(R, x, y)$ :

$$E(x, y) \vee \exists z(E(x, z) \wedge R(z, y)).$$

Scriviamo  $E \circ X := \{(a, b) \in A^2 : \exists c((a, c) \in E \wedge (c, b) \in X)\}$  e vediamo che

$$\begin{aligned} F_\varphi(X) &= \{(a, b) \in A^2 : \mathfrak{A} \models (E(a, b) \vee \exists z(E(a, z) \wedge ((z, b) \in X))\} \\ &= E \cup (E \circ X). \end{aligned}$$

Notiamo ora che  $F_\varphi$  è monotono poiché se  $X \subseteq Y$  allora  $E \circ X \subseteq E \circ Y$ . In particolare per gli operatori monotoni abbiamo che  $\mathbf{lfp}(F_\varphi) = \mathbf{ifp}(F_\varphi)$  ed è quest'ultimo punto fisso che ci serve per costruire la formula  $\psi$ . Con questa osservazione possiamo evitare di definire gli operatori  $F_{\text{inf}}(X) = X \cup F_\varphi(X)$  e studiare la successione  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  direttamente su  $F_\varphi(X)$ :

$$\begin{aligned} X_1 &= F_\varphi(\emptyset) = E \\ X_2 &= F_\varphi(E) = E \cup (E \circ E) = E \cup E^2 \\ X_3 &= F_\varphi(E \cup E^2) = E \cup (E \circ (E \cup E^2)) = E \cup E^2 \cup E^3 \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Notiamo che la Definizione 2.4 descrive gli operatori  $F_\varphi$  per una formula al prim'ordine. Una definizione più rigorosa della semantica di IFP prevede una definizione induttiva di  $F_\varphi$  che usa la Definizione 2.4 come base.

Dunque  $X_i = E \cup \dots \cup E^i$  è l'insieme delle coppie che sono connesse con un cammino di lunghezza al più  $i$ . Per il Teorema di Tarski-Knaster (2.1) vale che  $X_\infty = \mathbf{lfp}(F_\varphi) = \mathbf{ifp}(F_\varphi)$  il quale coincide con la chiusura transitiva di  $E$ . Dunque per la formula  $\psi = [\mathbf{ifp}_{R,x,y}\varphi(R, x, y)]$  vale che

$$\mathfrak{A} \models [\mathbf{ifp}_{R,x,y}\varphi(R, x, y)](a, b) \leftrightarrow (a, b) \text{ appartiene alla chiusura transitiva di } E.$$

La formula  $\forall x \forall y \psi(x, y)$  esprime la connessione in un grafo.

Osserviamo che tale formula è anche presente nella logica LFP che definiremo in seguito, in quanto  $\varphi$  è positiva rispetto  $R$  (si vedano le Definizioni 2.6 e 2.7).

Non si può immediatamente definire una logica con il minimo punto fisso poiché il Teorema di Tarski-Knaster richiede l'uso di operatori monotoni. Un esempio di una formula per cui l'operatore corrispondente non è monotono è  $\alpha(S, x) \equiv \neg S(x)$ . Infatti, per verificare che l'operatore  $F_\alpha$  non è monotono, basta notare che  $F_\alpha(\emptyset) = A$  e  $F_\alpha(A) = \emptyset$ . Il problema di verifica della monotonia di un operatore è trattato nel Teorema 2.3. Faremo uso del seguente importante teorema della teoria dei modelli finiti.

**Teorema 2.2** (Trakhtenbrot). *Il problema della validità della logica FO nella classe di tutti i modelli finiti è indecidibile.*

*Dimostrazione.* Si veda [2, teorema 9.2] □

**Teorema 2.3** (Indecidibilità della monotonia di  $F_\varphi$ ). *Per una formula  $\varphi$  in FO, il problema di determinare se  $F_\varphi$  sia monotono su ogni interpretazione finita  $\mathfrak{A}$  è non decidibile.*

*Dimostrazione.* Sia  $\phi$  una formula arbitraria e  $\varphi(S, x) \equiv (S(x) \rightarrow \phi)$ . Supponiamo  $\phi$  sia valida su strutture finite. Allora  $\varphi(S, x)$  è sempre vera e dunque  $F_\varphi$  è monotona in ogni struttura finita. Supponiamo adesso che  $\mathfrak{A} \not\models \phi$  per qualche struttura finita non vuota  $\mathfrak{A}$ . Dunque su  $\mathfrak{A}$ ,  $\varphi(S, x)$  è equivalente ad  $\neg S(x)$  e dunque  $F_\varphi$  non è monotona. Otteniamo  $F_\varphi$  è monotona se e solo se  $\phi$  è valida su modelli finiti. L'indecidibilità segue per il Teorema di Trakhtenbrot (2.2). □

Alla luce del precedente teorema, dobbiamo attuare delle restrizioni sintattiche e utilizzare solo le formule per cui sia garantita la monotonia di  $F_\varphi$ . Costruiamo un criterio (Lemma 2.1) facendo uso delle seguenti definizioni:

**Definizione 2.6.** *Data una formula  $\varphi$  di FO (che senza perdita di generalità possiamo supporre non contenere occorrenze del simbolo logico  $\rightarrow$ ), diciamo che un'occorrenza di  $R$  è:*

- negativa se è nel campo d'azione di un numero dispari di negazioni;
- positiva se è nel campo d'azione di un numero pari di negazioni.

Diciamo che  $\varphi$  è positiva in  $R$  se tutte le occorrenze di  $R$  sono positive.

Ad esempio la formula  $\exists x \neg R(x) \wedge \neg \forall y \forall z \neg (R(y) \vee \neg R(z))$  è positiva nella seconda occorrenza di  $R$  mentre è negativa nella prima e ultima occorrenza di  $R$ , dunque la formula non è positiva in  $R$ .

Il seguente lemma si dimostra facilmente per induzione sulla struttura delle formule.

**Lemma 2.1.** *Se  $\varphi(R, \vec{x})$  è una formula al prim'ordine positiva in  $R$  allora  $F_\varphi$  è monotono.*

Con questi ingredienti è possibile definire la logica LFP. Per farlo, è sufficiente seguire passo per passo la definizione della logica IFP (2.5) e restringere la LFP-regola di costruzione alle sole formule positive: questa restrizione ci permetterà di definire la semantica nel caso degli operatori di punto fisso.

**Definizione 2.7** (Logica LFP). *Dato un qualsiasi vocabolario  $\tau$ , le formule della logica LFP sono caratterizzate dalla chiusura per le seguenti regole di costruzione:*

- $\Rightarrow \varphi$  dove  $\varphi$  è una formula atomica su  $\tau$ ;
- $\varphi \Rightarrow \neg\varphi$ ;  $\varphi, \psi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)$ ;  $\varphi \Rightarrow \exists x\varphi$ ;
- $\varphi \Rightarrow [\mathbf{lfp}_{\vec{x}, X}\varphi]\vec{t}$  dove  $\varphi$  è una formula positiva in  $X$  (cioè se ogni occorrenza di  $X$  è nel campo d'azione di un numero pari di negazioni),  $\vec{x}$  e  $\vec{t}$  hanno la stessa arietà e coincide con quella di  $X$ .

Gli enunciati sono le formule senza occorrenze di variabili libere al primo e secondo ordine, dove le variabili libere  $\text{free}(\varphi)$  sono definite nel modo usuale, con l'aggiunta di

$$\text{free}([\mathbf{lfp}_{\vec{x}, X}\varphi]\vec{t}) := \text{free}(\vec{t}) \cup (\text{free}(\varphi) \setminus \{\vec{x}, X\}).$$

La semantica di LFP si definisce in modo induttivo, dimostrando allo stesso tempo che se  $\varphi(R, \vec{x})$  è positiva in  $R$  allora l'operatore  $F_\varphi$  è monotono (il caso base è dato dal Lemma 2.1). Questo ci permette di definire la semantica per le formule ottenute dall'applicazione della LFP-regola come segue: sia  $\varphi(X, \vec{x})$  una formula positiva in  $X$ , con  $X$  variabile relazionale  $k$ -aria, siano le variabili libere di  $[\mathbf{lfp}_{\vec{x}, X}\varphi]\vec{t}$  tra quelle che occorrono in  $\vec{u}$  e  $\vec{Y}$  e siano  $\vec{b}, \vec{S}$  interpretazioni in  $\mathfrak{A}$  rispettivamente di  $\vec{u}$  e  $\vec{Y}$ , allora

$$\mathfrak{A} \models [\mathbf{lfp}_{X, \vec{x}\varphi}\vec{t}]\vec{b}, \vec{S} \iff (t_1[\vec{b}], \dots, t_k[\vec{b}]) \in \mathbf{lfp}(F_\varphi),$$

dove anche nell'operatore  $F_\varphi$  le  $\vec{u}, \vec{Y}$  sono interpretate come  $\vec{b}, \vec{S}$  rispettivamente (si veda la Definizione 2.4).

Vediamo alcuni esempi che mostrano l'estensione della capacità espressiva di LFP rispetto ad FO.

**Esempio 2.2** (Aciclicità di un grafo). *Consideriamo un grafo orientato con relazione di adiacenza  $E$  e la seguente formula*

$$\alpha(S, x) = \forall y(E(y, x) \rightarrow S(y)).$$

Questa formula è positiva in  $S$ . L'operatore  $F_\alpha$  associa ad un insieme  $X$  l'insieme di tutti i nodi a tali che tutti i nodi  $b$  per la quale  $(b, a) \in E$  sono in  $X$ . Iteriamo questo operatore. Chiaramente  $F_\alpha(\emptyset)$  è l'insieme dei nodi con grado entrante nullo. Allora  $F_\alpha(F_\alpha(\emptyset))$  è dato da tutti quei nodi tali che tutti i nodi  $b$  per cui  $(b, a) \in E$  hanno grado entrante nullo. Riformulando,  $F_\alpha(F_\alpha(\emptyset))$  è l'insieme dei nodi a tali che tutti i sentieri terminanti in  $a$  hanno lunghezza al più 1. Reiterando il ragionamento si ottiene che  $F_\alpha^i(\emptyset)$  è dato da tutti i nodi a tali per cui tutti i sentieri terminanti in  $a$  hanno lunghezza al più  $i$ . Si ottiene che  $\mathbf{lfp}(F_\alpha)$  è dato da tutti quei nodi che hanno

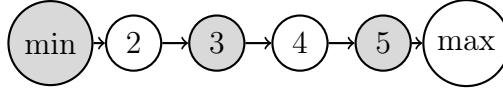


Figura 1: Esempio 2.3

sentieri terminanti in  $a$  di lunghezza limitata. Questo equivale a richiedere che nessun sentiero che termina in  $a$  contenga un ciclo. Dunque la formula

$$\forall u [\mathbf{lfp}_{S,x}\alpha(S, x)](u)$$

è soddisfatta se e solo se il grafo è aciclico.

**Esempio 2.3** (Parità su strutture ordinate). Consideriamo il vocabolario  $\tau = \{<, S, \min, \max\}$  dove  $<$  è interpretato come un ordine lineare ed  $S$  è interpretato come la funzione successore (definibile in FO attraverso  $<$ ). Considero la formula  $\alpha(I, x)$ :

$$(x = \min) \vee \exists y (I(y) \vee x = S(S(y)))$$

Tale formula ha occorrenze positive di  $I$ , perciò troviamo il punto fisso grazie al Teorema di Tarski-Knaster (2.1). Si ha che  $F_\alpha(\emptyset) = \{\min\}$ , poi  $F_\alpha(F_\alpha(\emptyset)) = \{x : x = \min \vee x \text{ dista } 2 \text{ da } \min\}$  e così via fino a trovare  $\mathbf{lfp}(F_\alpha)$ . Notiamo ora che  $A$  ha cardinalità pari sse  $\mathfrak{A} \models \neg[\mathbf{lfp}_{I,x}\alpha(I, x)](\max)$ . Dunque con LFP è possibile esprimere la parità in strutture ordinate.

**Esempio 2.4** (Un gioco su un grafo). Consideriamo un grafo finito orientato  $G$  su un linguaggio  $\mathcal{L}$  contenente il simbolo  $E$  per la relazione di adiacenza del grafo. Sia  $a$  un vertice di  $G$ . Due giocatori  $I$  e  $II$  a turno scelgono rispettivamente un vertice  $b_i$  e un vertice  $c_i$  con la proprietà che  $(a, b_1), (b_i, c_i), (c_i, b_{i+1}) \in E$  (con vertici non necessariamente distinti). Un giocatore perde appena non ha più modi di scegliere un nodo che rispetti queste regole (si noti che il gioco potrebbe non terminare). Siamo interessati a trovare tutti i vertici iniziali  $a$  per cui esista una strategia vincente per il giocatore  $II$ .

Sia  $S \notin \mathcal{L}$  e sia  $\alpha(S, x)$  la formula

$$\forall y (E(x, y) \rightarrow \exists z (E(y, z) \wedge S(z))).$$

Si ha che  $F_\alpha(\emptyset)$  è costituito da tutti i nodi aventi grado uscente nullo;  $F_\alpha(F_\alpha(\emptyset))$  è invece formato dai nodi che hanno grado uscente nullo oppure che puntano nodi che a loro volta puntano almeno un nodo con grado uscente nullo. Iterando si ottiene che, all' $i$ -esimo passo,  $F_\alpha^i(\emptyset)$  è costituito da tutti i nodi per cui esiste una strategia vincente per il giocatore  $II$  in  $i - 1$  passi.

Poiché  $\alpha$  è positiva in  $S$ , si ha che  $F_\alpha$  è monotono e dunque ammette  $X_\infty$  come minimo punto fisso. Per quanto osservato,  $X_\infty$  è l'insieme di tutti e soli i vertici iniziali dai quali il giocatore  $II$  ha una strategia vincente.

Vale dunque che  $G \models [\mathbf{lfp}_{S,x}\alpha(S, x)](a)$  sse il giocatore  $II$  ha una strategia vincente dal nodo  $a$ .

## 2.3 Proprietà di LFP e IFP

È possibile costruire una generalizzazione dell'operatore di punto fisso che permette l'iterazione di diverse formule alla volta.

**Definizione 2.8.** (*Punto fisso simultaneo*) Sia  $m \geq 0$ , siano  $M_0, \dots, M_m$  insiemi finiti e siano

$$\begin{aligned} F^0 &: \mathcal{P}(M_0) \times \dots \times \mathcal{P}(M_m) \rightarrow \mathcal{P}(M_0) \\ F^1 &: \mathcal{P}(M_0) \times \dots \times \mathcal{P}(M_m) \rightarrow \mathcal{P}(M_1) \\ &\vdots \\ F^m &: \mathcal{P}(M_0) \times \dots \times \mathcal{P}(M_m) \rightarrow \mathcal{P}(M_m). \end{aligned}$$

Definiamo la successione  $(F_{(n)}^0, \dots, F_{(n)}^m)_{n \geq 0}$  nel seguente modo:

$$F_{(0)}^i := \emptyset, \quad F_{(n+1)}^i := F^i(F_{(n)}^0, \dots, F_{(n)}^m).$$

Se esiste un  $n$  tale che gli operatori  $(F_{(n)}^0, \dots, F_{(n)}^m) = (F_{(n+1)}^0, \dots, F_{(n+1)}^m)$  allora diremo che  $(F^0, \dots, F^m)$  ammettono punto fisso simultaneo, denotato con  $(F_{(\infty)}^0, \dots, F_{(\infty)}^m)$ , ed è dato dall'insieme:

$$(F_{(\infty)}^0, \dots, F_{(\infty)}^m) := (F_{(n)}^0, \dots, F_{(n)}^m).$$

Le definizioni in 2.1 si generalizzano valutando per ciascuna coordinata come segue.

**Definizione 2.9.** Siano  $F^0, \dots, F^m$  come nella definizione precedente.

- $(F^0, \dots, F^m)$  è monotono se per arbitrari  $X_0, \dots, X_m, Y_0, \dots, Y_m$  e per ogni  $i \leq m$  vale che

$$X_0 \subseteq Y_0, \dots, X_m \subseteq Y_m \text{ implica che } F^i(X_0, \dots, X_m) \subseteq F^i(Y_0, \dots, Y_m);$$

- $(F^0, \dots, F^m)$  è inflazionario se per arbitrari  $X_0, \dots, X_m$  e per ogni  $i \leq m$  vale che

$$X_i \subseteq F^i(X_0, \dots, X_m);$$

- $(F^0, \dots, F^m)$  è induttivo se per ogni  $i \leq m$  vale che

$$F_{(0)}^i \subseteq F_{(1)}^i \subseteq F_{(2)}^i \subseteq \dots$$

Valgono le seguenti proprietà che si dimostrano per diretta generalizzazione dei risultati della Sezione 2.1.

**Lemma 2.2.** Siano  $F^0, \dots, F^m$  come nella Definizione 2.8.

- Se  $(F^0, \dots, F^m)$  è induttivo allora esiste il punto fisso simultaneo;
- se  $(F^0, \dots, F^m)$  è monotono o inflazionario allora  $(F^0, \dots, F^m)$  è induttivo;
- se  $(F^0, \dots, F^m)$  è monotono allora  $(F_{(\infty)}^0, \dots, F_{(\infty)}^m)$  è il punto fisso simultaneo di  $(F^0, \dots, F^m)$ ;

Con quanto introdotto possiamo definire la logica ai minimi punti fissi simultanei ponendo attenzione all'ipotesi di positività delle formule.

**Definizione 2.10** (S-LFP). *Dato un qualsiasi vocabolario  $\tau$ , le formule della logica S-LFP sono caratterizzate dalla chiusura per le seguenti regole di costruzione:*

- $\Rightarrow \varphi$  dove  $\varphi$  è una formula atomica su  $\tau$ ;
- $\varphi \Rightarrow \neg\varphi$ ;  $\varphi, \psi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)$ ;  $\varphi \Rightarrow \exists x\varphi$ ;
- $\varphi_0, \dots, \varphi_m \Rightarrow [\mathbf{s-ifp}_{\vec{x}_0, X_0, \dots, \vec{x}_m, X_m} \varphi_0, \dots, \varphi_m] \vec{t}$  dove le formule  $\varphi_0, \dots, \varphi_m$  sono positive in tutte le variabili  $X_0, \dots, X_m$ ,  $m \geq 0$ , per ogni  $i = 0, \dots, m$  l'arietà di  $X_i$  è pari alla lunghezza di  $\vec{x}_i$  e  $\vec{t}$  ha la stessa lunghezza di  $\vec{x}_0$ . Le variabili in ciascuna sequenza  $\vec{x}_i$  sono distinte ma possono occorrere più volte tra le varie  $\vec{x}_i$ .

Una variabile  $x$  è libera in  $[\mathbf{s-ifp}_{\vec{x}_0, X_0, \dots, \vec{x}_m, X_m} \varphi_0, \dots, \varphi_m] \vec{t}$  se  $x$  è in  $\vec{t}$  o se per qualche  $i$ ,  $x$  è libera in  $\varphi_i$  e non è in  $\vec{x}_i$ .

Definiamo, per semplicità di scrittura, la semantica per solo gli enunciati di formule della forma  $[\mathbf{s-ifp}_{\vec{x}_0, X_0, \dots, \vec{x}_m, X_m} \varphi_0, \dots, \varphi_m] \vec{t}$ . Sia  $\mathfrak{A}$  una  $\tau$ -struttura con dominio  $A$ . Consideriamo, per  $i = 0, \dots, m$ , la seguente sequenza di operatori  $F^i: \mathcal{P}(A^k) \rightarrow \mathcal{P}(A^k)$ :

$$F^i(X_0, \dots, X_m) := \{(a_1, \dots, a_k) \in A^k \mid \mathfrak{A} \models \varphi_i(a_1, \dots, a_k, X_0, \dots, X_m)\},$$

con  $k$  l'arietà della variabile relazionale  $X_0$ . Grazie all'ipotesi di positività si dimostra per induzione nella complessità delle formule che il sistema  $(F^0, \dots, F^m)$  è monotono dunque  $(F_\infty^0, \dots, F_\infty^m)$  è il minimo punto fisso di  $(F^0, \dots, F^m)$ . Per definizione,  $[\mathbf{s-ifp}_{\vec{x}_0, X_0, \dots, \vec{x}_m, X_m} \varphi_0, \dots, \varphi_m] \vec{t}$  ha il significato di  $\vec{t} \in F_\infty^0$ , cioè

$$\mathfrak{A} \models [\mathbf{s-ifp}_{\vec{x}_0, X_0, \dots, \vec{x}_m, X_m} \varphi_0, \dots, \varphi_m] \vec{t} \iff \vec{t} \in F_\infty^0.$$

Vediamo un esempio.

**Esempio 2.5.** Consideriamo un grafo orientato  $G = (V, E)$  su un linguaggio  $\mathcal{L} = \{E, \dots\}$  con  $E$  relazione di adiacenza del grafo e dominio  $V$ . Siano  $X, Y \notin \mathcal{L}$  due simboli relazionali rispettivamente unario e binario. Siano  $F$  e  $H$  gli operatori corrispondenti alle S-LFP-formule  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  definite da

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, X, Y) &:= Y(x, x); \\ \varphi_1(x, y, X, Y) &:= E(x, y) \vee \exists z(Y(x, z) \wedge E(z, y)). \end{aligned}$$

Osserviamo che  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  sono positive, dunque  $(F_\infty, H_\infty)$  è il minimo punto fisso simultaneo per  $(F, H)$ . Si nota che, anche se in  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  non vi sono occorrenze della variabile relazionale  $X$ , essa è necessaria per il calcolo della successione  $(F_{(n)}, H_{(n)})_{n \geq 0}$  come definito in 2.8. Abbiamo che

$$\begin{aligned} F(X, Y) &= \{a \in V \mid (a, a) \in Y\}; \\ H(X, Y) &= \{(a, b) \in V^2 \mid (a, b) \in E \vee \exists z((a, z) \in Y \wedge (z, b) \in E)\}. \end{aligned}$$

Calcoliamo i primi passi della successione:

$$\begin{aligned} F_{(0)} &= H_{(0)} = \emptyset; \\ F_{(1)} &= F(F_{(0)}, H_{(0)}) = \emptyset; \\ H_{(1)} &= H(F_{(0)}, H_{(0)}) = E \\ F_{(2)} &= F(F_{(1)}, H_{(1)}) = \{a \in V \mid (a, a) \in E\}; \\ H_{(2)} &= H(F_{(1)}, H_{(1)}) = \{(a, b) \in V^2 \mid \text{esiste un cammino da } a \text{ a } b \text{ lungo al più 2}\}; \\ F_{(3)} &= \{a \in V \mid \text{esiste un cammino lungo al più 2 che congiunge } a \text{ con sè stesso}\}; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Si ottiene che  $H_{(\infty)}$  è l'insieme delle coppie di nodi  $(a, b) \in V^2$  per cui esiste un cammino che collega  $a$  a  $b$ , mentre  $F_{(\infty)}$  è l'insieme dei nodi  $c \in V$  per cui esiste un ciclo passante per  $c$ . Dunque,

$$G \models [\mathbf{s}\text{-lfp}_{x,X,xy,Y}\varphi_0, \varphi_1]z \text{ se e solo se } z \in F_{(\infty)},$$

cioè se e solo se esiste un ciclo passante per  $z$ .

Punti fissi simultanei sono spesso convenienti per esprimere proprietà complesse, in particolare quando è necessario definire diversi insiemi alla volta. Tuttavia, tali generalizzazioni non arricchiscono l'espressività.

**Definizione 2.11.** Diciamo che due logiche  $L_1, L_2$  sono equivalenti qualora per ogni  $\mathcal{K}$  classe di strutture vale che  $\mathcal{K}$  è definibile in  $L_1$  se e solo se  $\mathcal{K}$  è definibile in  $L_2$ . Denotiamo con  $L_1 \equiv L_2$  tale proprietà.

Vale infatti

**Teorema 2.4.**  $S\text{-LFP} \equiv LFP$ .

*Dimostrazione.* Si rimanda al [15, teorema 8.2.2].  $\square$

Faremo uso anche della seguente equivalenza tra logiche:

**Teorema 2.5** (Gurevich-Shelah).  $IFP \equiv LFP$ .

*Dimostrazione.* Si rimanda al [2, corollario 10.12].  $\square$

Introduciamo adesso un'ulteriore logica, anch'essa equivalente alle altre, di cui faremo uso nella dimostrazione del teorema di Immerman-Vardi, in quanto è dotata di una sintassi più semplice.

**Definizione 2.12** ( $LFP_0$ ). Dato un qualsiasi vocabolario  $\tau$ , le formule della logica  $LFP_0$  sono date dalla chiusura per le seguenti regole di costruzione:

- $\Rightarrow \varphi$  dove  $\varphi$  è una formula atomica su  $\tau$ ;
- $\varphi \Rightarrow \neg\varphi$ ;  $\varphi, \psi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)$ ;  $\varphi \Rightarrow \exists x\varphi$ ;

Inoltre, data una qualsiasi formula positiva in  $X$   $\psi$  ottenuta dalle regole sopra, si ha che anche  $[\mathbf{lfp}_{\vec{x}, X}\psi]\vec{t}$  è una formula di  $LFP_0$ , dove  $\vec{x}$  e  $\vec{t}$  hanno la stessa arietà e coincide con quella di  $X$ .

Gli enunciati sono le formule senza occorrenze di variabili libere al primo e secondo ordine, dove le variabili libere  $free(\varphi)$  sono definite nel modo usuale, con l'aggiunta di

$$free([\mathbf{lfp}_{\vec{x}, X}\varphi]\vec{t}) := free(\vec{t}) \cup (free(\varphi) \setminus \{\vec{x}, X\}).$$

La semantica per le formule ottenute dall'applicazione della  $LFP$ -regola è definita come segue: sia  $X$  variabile relazionale  $k$ -aria, siano le variabili libere di  $[\mathbf{lfp}_{\vec{x}, X}\varphi]\vec{t}$  tra quelle che occorrono in  $\vec{u}$  e  $\vec{Y}$  e siano  $\vec{b}, \vec{S}$  interpretazioni in  $\mathfrak{A}$  rispettivamente di  $\vec{u}$  e  $\vec{Y}$ , allora

$$\mathfrak{A} \models [\mathbf{lfp}_{X, \vec{x}}\varphi]\vec{t}[\vec{b}, \vec{S}] \iff (t_1[\vec{b}], \dots, t_k[\vec{b}]) \in \mathbf{lfp}(F_\varphi),$$

dove anche nell'operatore  $F_\varphi$  le  $\vec{u}, \vec{Y}$  sono interpretate come  $\vec{b}, \vec{S}$  rispettivamente (si veda la Definizione 2.4).



**Osservazione.** Notiamo la differenza tra  $LFP$  e  $LFP_0$ : in  $LFP_0$  permettiamo di considerare punti fissi di formule esclusivamente in  $FO$ . In altre parole, le formule di  $LFP_0$  o sono in  $FO$  o sono della forma  $[lfp_{R_i, \phi}](\vec{x})$ , dove  $\phi$  è composto da formule di  $FO$ .

**Lemma 2.3.**  $LFP \equiv LFP_0$ .

*Dimostrazione.* Si rimanda ad [2, corollario 10.13]. □

**Notazione.** Avendo  $IFP$ ,  $LFP$ ,  $S-LFP$  e  $LFP_0$  la medesima capacità espressiva, li denotiamo sotto l'unica sigla  $FP$ .

## 2.4 Logica con contatore

Come già evidenziato, dal punto di vista dell'espressività, la logica al primo ordine presenta due principali mancanze: è incapace di esprimere proprietà ricorsive e non può "contare". Abbiamo già osservato come l'estensione per punti fissi permetta la realizzazione di proprietà ricorsive (Esempio 2.1). Inoltre su strutture ordinate è anche possibile costruire interrogazioni riguardanti la cardinalità di strutture (Esempio 2.3). Tuttavia su arbitrarie strutture finite (anche non ordinate) questo non sempre è possibile.

Immerman propose dunque un'ulteriore estensione delle logiche a punti fissi attraverso l'implementazione di un meccanismo per contare. Nonostante tale estensione non permetta l'espressione di tutte le proprietà polinomiali, la logica  $FP+C$  che andremo a definire risulta essere naturale e permette di catturare  $P$ time su importanti classi di strutture. Esistono varie estensioni equivalenti tra loro. In seguito proponiamo una logica con contatore che lavora su strutture bicomposte, con due famiglie di variabili tipizzate.

**Notazione.** Data una struttura  $\mathfrak{A}$  con dominio  $A$ , denotiamo con  $\mathfrak{A}^*$  la struttura  $\mathfrak{A}^* := \mathfrak{A} \dot{\cup} \{0, \dots, |A|\}; \leq, S, 0, \max$ , dove  $\leq$  è l'ordine canonico sul sottoinsieme di numeri naturali  $\{0, \dots, |A|\}$ ,  $0$  è il minimo,  $\max$  il massimo ed  $S$  la relazione successore.

Su tali strutture considereremo due insiemi separati di variabili. Indicheremo con  $x, y, z \dots$  le variabili che variano sul dominio degli elementi della struttura e indichiamo con le lettere greche  $\lambda, \mu, \nu \dots$  quelli che variano sugli interi non negativi. Le due strutture che compongono  $\mathfrak{A}^*$  sono legate da *termini contatori*. Questi termini permettono di contare il numero di elementi per cui una formula risulta soddisfatta. Formalizziamo questi concetti definendo la logica a punto fisso inflazionario con contatore.

**Definizione 2.13** ( $IFP+C$ ). Sia  $\mathfrak{A}$  una  $\tau$ -struttura con  $\tau \cap \{<, S, 0, \max\} = \emptyset$ . I termini e le formule sono caratterizzate dalla simultanea realizzazione dalle seguenti affermazioni:

- tutti i  $\tau$ -termini del primo ordine (con variabili  $x, y, \dots$ ) sono termini della prima struttura di  $\mathfrak{A}^*$  mentre tutti i termini al primo ordine di vocabolario  $\{<, S, 0, \max\}$  (con variabili  $\mu, \nu, \dots$ ) sono termini della componente numerica di  $\mathfrak{A}^*$  (a questi aggiungeremo ulteriori termini numerici grazie ai "termini contatori");
- tutte le  $\tau$ -formule atomiche e tutte le  $\{<, S, 0, \max\}$ -formule atomiche (con i corrispondenti termini) sono formule.

- se  $X$  è una variabile relazionale di arietà mista  $n_1, n_2$  (rispettivamente del primo e secondo tipo) allora  $X\vec{t}\vec{\rho}$  è una formula, dove  $\vec{t}$  e  $\vec{\rho}$  sono sequenze di termini del primo e secondo tipo rispettivamente di lunghezza  $n_1$  e  $n_2$ ;
- se  $\varphi$  e  $\psi$  sono formule allora lo sono anche  $\neg\varphi$  e  $\varphi \vee \psi$ ;
- se  $\varphi$  è una formula allora  $\exists x\varphi$  e  $\exists\nu\varphi$  sono formule;
- se  $\varphi$  è una formula allora  $[\mathbf{ifp}_{\vec{x}\vec{\nu}, X}\varphi]\vec{t}\vec{\rho}$  è una formula (le lunghezze di  $\vec{x}, \vec{\nu}, \vec{t}, \vec{\rho}$  sono in accordo con l'arietà mista di  $X$ );
- se  $\varphi$  è una formula allora  $\#_x\varphi$  è un "termine contatore" della componente numerica. Più precisamente: sia  $\varphi(x)$  una formula con  $x$  occorrenza libera di variabile del primo tipo. Allora  $\#_x[\varphi]$  è un termine con le stesse occorrenze di variabili libere di  $\varphi(x)$  escluso  $x$ . Il termine  $\#_x[\varphi] \in \{0, \dots, |A|\}$  si interpreta assegnando il numero di elementi  $a$  che soddisfano  $\varphi(a)$ .

L'occorrenza di variabili libere e la semantica per le formule del tipo  $[\mathbf{ifp}_{\vec{x}\vec{\nu}, X}\varphi]\vec{t}\vec{\rho}$  è la stessa della logica IFP (Definizione 2.3).

Vediamo degli esempi.

**Esempio 2.6.** Su un grafo non orientato  $G = (V, E)$ , la formula

$$\varphi \equiv \forall x\forall y(\#_z[(E(x, z))] = \#_z[E(y, z)])$$

esprime l'asserzione che ogni nodo ha lo stesso grado. In altri termini  $G \models \varphi$  se e solo se il grafo è regolare.

**Esempio 2.7.** Costruiamo una formula  $\psi(E_1, E_2)$  nella logica al primo ordine con contatore che esprima la proprietà di isomorfismo fra le due relazioni d'equivalenza  $E_1, E_2$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché due relazioni d'equivalenza siano isomorfe è che per ogni  $\mu$  le due relazioni d'equivalenza abbiano lo stesso numero di classi di equivalenza di dimensione  $\mu$ . La seguente formula esprime proprio questa condizione:

$$\psi(E_1, E_2) \equiv \forall\mu(\#_x[\#_y[E_1(x, y)] = \mu] = \#_x[\#_y[E_2(x, y)] = \mu]).$$

Una costruzione analoga si realizza per LFP+C, ponendo attenzione all'ipotesi di positività (Definizione 2.6). L'equivalenza delle logiche LFP e IFP si traduce anche nell'equivalenza delle logiche LFP+C e IFP+C ([4]).

## 3 L'espressività di FP e FP+C

### 3.1 Il potere espressivo delle logiche a punti fissi

In questa sezione daremo dei cenni della dimostrazione del Teorema di Immerman-Vardi e, basandoci su questo teorema, mostreremo un esempio di una logica patologica che "cattura" Ptime.

**Proposizione 3.1.** *Siano  $\phi, \mathfrak{A}$  rispettivamente una formula di FO e una struttura su uno stesso vocabolario  $\tau$ . Sia  $k$  il numero massimo di occorrenze libere di variabili in sottoformule di  $\phi$ . Determinare se  $\mathfrak{A} \models \phi$  può essere svolto in tempo*

$$O(\|\phi\| \cdot |\mathfrak{A}|^k),$$

dove con  $\|\phi\|$  indichiamo il numero di sottoformule di  $\phi$ .

*Dimostrazione.* Per svolgere questa dimostrazione faremo uso del un sistema di codifica per strutture introdotto nella prima sezione. Assumiamo, senza perdita di generalità, che in  $\phi$  occorran  $\wedge, \neg$  e  $\exists$  ma non  $\vee$  e  $\forall$ . Siano  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  le sottoformule di  $\phi$ ; sappiamo che contengono al più  $k$  variabili libere. Costruiamo induttivamente  $\varphi_i(\mathfrak{A})$ . Se  $\varphi_i$  ha  $k_i$  variabili libere allora  $\varphi_i(\mathfrak{A}) = \{\vec{a} \in A^{k_i} \mid \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a})\}$ , il quale sarà rappresentato da un vettore booleano di lunghezza  $n^{k_i}$ , dove  $n = |A|$ .

Se  $\varphi_i$  è una formula atomica  $R(x_1, \dots, x_{k_i})$ , allora  $\varphi_i(\mathfrak{A})$  è semplicemente la codifica di  $R$  in  $\text{enc}(\mathfrak{A})$ . Se  $\varphi_i$  è  $\neg\varphi_j(\mathfrak{A})$  semplicemente cambiamo tutti i bit nella rappresentazione di  $\varphi_j(\mathfrak{A})$ . Se  $\varphi_i$  è  $\varphi_j \wedge \varphi_l$  vi sono due casi. Se le variabili libere sono tutte in comune, si ottiene la codifica di  $\varphi_i(\mathfrak{A})$  applicando la congiunzione componente per componente. Altrimenti,  $\varphi_i(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \varphi_j(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \varphi_l(\vec{x}, \vec{z})$ . In tal caso per tutte le tuple su  $\vec{a} \in A^{|\vec{x}|}, \vec{b} \in A^{|\vec{y}|}, \vec{c} \in A^{|\vec{z}|}$  tali che i bit corrispondenti ad  $(\vec{a}, \vec{b})$  in  $\varphi_j(\mathfrak{A})$  e ad  $(\vec{a}, \vec{c})$  in  $\varphi_l(\mathfrak{A})$  sono posti ad 1, poniamo i bit corrispondenti ad  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  in  $\varphi_i(\mathfrak{A})$  ad 1. Infine, se  $\varphi_i(\vec{x}) = \exists z \varphi_j(z, \vec{x})$ , percorriamo semplicemente la codifica di  $\varphi_j(\mathfrak{A})$  e, se il bit corrispondente ad  $(a, \vec{a})$  è posto ad 1, allora poniamo il bit corrispondente ad  $\vec{a}$  in  $\varphi_i(\mathfrak{A})$  ad 1.

Si può facilmente verificare che tale algoritmo può essere implementato in tempo  $O(\|\phi\| \cdot |\mathfrak{A}|^k)$ , in quanto nessuna delle  $\varphi_i$  ha più di  $k$  variabili libere.  $\square$

**Notazione.** *Sia  $\varphi$  una L-formula. Denotiamo con  $\text{Mod}(\varphi)$  l'insieme delle strutture  $\mathfrak{A}$  tali che  $\mathfrak{A} \models \varphi$ .*

Abbiamo tutti i tasselli per enunciare e dimostrare il teorema di Immerman-Vardi.

**Teorema 3.1** (Immerman-Vardi). *La logica FP cattura Ptime nella classe delle strutture ordinate finite. In altre parole, per ogni vocabolario  $\tau$  con  $<\in \tau$  e per ogni classe di FP( $\tau$ )-strutture ordinate finite  $\mathcal{J}$*

$$\mathcal{J} \in \text{Ptime} \iff \text{esiste un enunciato } \varphi \in \text{FP}(\tau) \text{ t.c. } \mathcal{J} = \text{Mod}(\varphi)$$

*Dimostrazione.* Fissiamo innanzitutto un vocabolario  $\tau$  con  $<\in \tau$  e una classe di strutture ordinate  $\mathcal{J}$  su  $\tau$ . Inoltre, per il Teorema di Gurevich-Shelah (2.5), possiamo usare indistintamente IFP e LFP.

( $\leftarrow$ ) Per ipotesi esiste un enunciato  $\varphi \in \text{IFP}(\tau)$  tale  $\mathcal{J} = \text{Mod}(\varphi)$ . Poiché  $\mathfrak{A} \in \mathcal{J}$  sse  $\mathfrak{A} \models \varphi$ , è sufficiente dimostrare che ogni formula di LFP può essere valutata polinomialmente su ogni struttura ordinata e finita  $\mathfrak{A}$ . Per il Lemma 2.3 possiamo limitarci a considerare le formule in  $\text{LFP}_0$ . Dunque una generica formula è in FO oppure è del tipo  $\mathbf{lfp}_{R, \vec{x}} \varphi$ , con  $\varphi$  in FO. Per formule in FO la dimostrazione è già svolta nella Proposizione 3.1. Per formule della forma  $\mathbf{lfp}_{R, \vec{x}} \varphi$  è sufficiente osservare quanto segue: se  $F: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$  è un operatore monotono Ptime computabile, allora  $\mathbf{lfp}(F)$  può essere calcolato in tempo polinomiale rispetto ad  $|A|$  perché, per il Teorema di Tarski-Knaster (2.1), esiste  $n \leq |A|$  per cui  $\mathbf{lfp}(F) = F^n(\emptyset)$ . Dunque ogni formula del tipo  $\mathbf{lfp}_{R, \vec{x}} \varphi$  può essere valutata in tempo polinomiale.

( $\rightarrow$ ) Viceversa, sia data una IFP( $\tau$ )-struttura  $\mathcal{J} \in \text{Ptime}$  testabile in tempo polinomiale da una macchina di Turing deterministica  $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, Q_a, Q_r)$  su un nastro infinito in una direzione. Assumiamo, senza perdita di generalità, che  $Q_a = \{q_a\}$ ,  $\Sigma = \{0, 1\}$  e che  $\Delta$  estenda  $\Sigma$  con *blank*. Vogliamo trovare  $\varphi$  tale che  $\mathcal{J} = \text{Mod}(\varphi)$ .

Sia  $k$  tale che, per ogni struttura  $\mathfrak{A}$ ,  $|A|^k$  ecceda sia la lunghezza della codifica della struttura  $\mathfrak{A}$  che il tempo necessario per una computazione su input  $\mathfrak{A}$ . Questo ci permette di utilizzare  $k$ -uple per rappresentare sia il tempo che lo spazio. Useremo l'ordine lessicografico fra  $\vec{k}$ -uple, esprimibile in FO via  $<$ , per rappresentare sia l'ordinamento temporale che quello spaziale. Vogliamo costruire dei predicati  $2k$ -ari  $\{T_0(\cdot, \cdot), T_1(\cdot, \cdot), T_2(\cdot, \cdot), (H_q(\cdot, \cdot))_{q \in Q}\}$ , dove  $T_i(\vec{p}, \vec{t})$  indica che la posizione  $\vec{p}$  contiene  $i$  (per  $i = 0, 1$  e *blank* per  $i = 2$ ) al tempo  $\vec{t}$ , mentre  $H_q(\vec{p}, \vec{t})$  indica che al tempo  $\vec{t}$  la macchina è nello stato  $q$  con la testina in  $\vec{p}$ .

L'obiettivo è trovare un sistema  $\Psi$  di formule in  $\mathcal{L} \cup \tau$  il cui minimo punto fisso simultaneo sia  $(T_0, T_1, T_2, (H_q)_{q \in Q})$ ; in tal modo l'enunciato  $\varphi$  in  $\tau$  sarà

$$\varphi \equiv \exists \vec{p} \exists \vec{t} [\mathbf{s-lfp}_{H_{q_a, \Psi}}](\vec{p}, \vec{t}).$$

Il sistema  $\psi$  contiene  $\psi_i(T_0, T_1, T_2, (H_q)_{q \in Q}, \vec{p}, \vec{t})$ , per  $i = 0, 1, 2$ , che definiranno i predicati  $T_i$  (esprimeranno il fatto che ogni cella contiene esattamente un elemento di  $\Delta$  e che i  $T_i$  rispettano la funzione di transizione dell'automa  $\delta$ ). Allo stesso modo ci saranno formule  $\psi_q(T_0, T_1, T_2, (H_q)_{q \in Q}, \vec{p}, \vec{t})$  al variare di  $q \in Q$  che descriveranno gli  $H_q$ . Da notare che i  $T_i$  e  $H_q$  sono parametri delle iterazioni di punto fisso, dove la  $j$ -esima iterazione rappresenta le configurazioni fino al tempo  $j - 1$ .

Per la costruzione effettiva di tali enunciati, esprimibili in FO( $\tau$ ), si veda [2, Teorema 10.14].  $\square$

Possiamo utilizzare il Teorema 3.1 per costruire un esempio patologico di una logica che soddisfa la prima condizione della Definizione 1.8 ma non la seconda.

**Esempio 3.1.** Diciamo che una formula  $\varphi$  di IFP di vocabolario  $\tau_{<} = \tau \cup \{<\}$  è invariante per ordine sui finiti se l'equivalenza

$$(\mathfrak{A}, <_1) \models \varphi \iff (\mathfrak{A}, <_2) \models \varphi$$

vale per ogni  $\tau$ -struttura finita  $\mathfrak{A}$  e per due ordini qualsiasi  $<_1, <_2$  di  $\mathfrak{A}$ . Osserviamo che se  $\mathcal{K}_{<} = \text{Mod}(\varphi)$  allora  $\varphi$  è invariante per ordine sui finiti (si veda la Definizione 1.4).

Sia  $L$  la logica così definita: le formule di  $L$  su un vocabolario  $\tau$  sono le formule di IFP( $\tau_{<}$ ) e la relazione  $\mathfrak{A} \models_L \varphi$  tra una  $\tau$ -struttura  $\mathfrak{A}$  e una  $L[\tau]$ -formula  $\varphi$  è definita da:

$$\mathfrak{A} \models_L \varphi \iff \varphi \text{ è invariante per ordine sui finiti ed esiste un ordine } < \text{ su } \mathfrak{A} \text{ tale che } (\mathfrak{A}, <) \models \varphi \text{ sulla logica IFP.}$$

Grazie al Teorema 3.1 possiamo dimostrare che ogni interrogazione booleana che è decidibile in tempo polinomiale è definibile in  $L$ , ovvero vale la prima delle due richieste della Definizione 1.8. Infatti, sia  $\mathcal{K} \in \text{Ptime}$  (cioè  $\mathcal{K}_{<} \in \text{Ptime}$ ), per il Teorema 3.1 esiste una formula  $\varphi \in \text{IFP}(\tau_{<})$  tale che  $\mathcal{K}_{<} = \text{Mod}(\varphi)$ . Se  $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$  e  $<$  è un ordine lineare qualsiasi su  $\mathfrak{A}$ , avremo che  $(\mathfrak{A}, <) \in \mathcal{K}_{<}$  e quindi  $(\mathfrak{A}, <) \models \varphi$ ; inoltre, poiché  $\mathcal{K}_{<} = \text{Mod}(\varphi)$  abbiamo che  $\varphi$  è invariante per ordine sui finiti. Viceversa, se  $\mathfrak{A} \models_L \varphi$

per definizione esiste un ordine  $<$  con  $(\mathfrak{A}, <) \models \varphi$ , quindi  $(\mathfrak{A}, <) \in \mathcal{K}_{<}$  e  $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ . Questo dimostra che ogni interrogazione in Ptime è definibile in  $L$ .

Nonostante ciò, la logica  $L$  appena definita non cattura Ptime: infatti non esiste una procedura effettiva per assegnare ad ogni  $L$ -formula  $\varphi$  un algoritmo che valuta se  $\mathfrak{A} \models_L \varphi$  in tempo polinomiale rispetto  $|\mathfrak{A}|$ , perché per vocabolari sufficientemente ricchi, valutare se una formula  $\varphi \in IFP(\tau_{<})$  sia invariante per ordine sui finiti non è un problema decidibile (si veda [4]).

### 3.2 La necessità di FP+C

Abbiamo visto come la logica FP risulti essere un'ottima generalizzazione della logica FO, in grado di esprimere proprietà interessanti (si vedano gli esempi nella sezione dedicata) e perfino catturare Ptime nelle classi di strutture ordinate (Teorema 3.1). Tuttavia, l'introduzione della logica IFP+C (o equivalenti) è motivata da almeno due considerazioni:

- la richiesta di un ordine lineare è estranea alle proprietà intrinseche delle strutture;
- gli unici esempi allora noti di proprietà non esprimibili in FP riguardavano proprietà sulla cardinalità delle strutture.

Ma la questione sull'esistenza di una logica naturale in grado di esprimere tutte e sole le proprietà decidibili in Ptime su strutture finite rimane aperta. Cai, Fürer e Immerman nel 1992 dimostrarono l'esistenza di proprietà Ptime non esprimibili in FP+C ([6]). La costruzione ingegnosa fa uso di giochi per costruire una classe di grafi<sup>6</sup>, decidibile in tempo polinomiale, che non è definibile in FP+C. La costruzione si basa sul problema di verifica dell'isomorfismo su grafi di grado al più 3, il quale è noto per un risultato di Luks ([5]) essere in Ptime.

Esistono, d'altra parte, importanti classi di grafi per cui FP+C cattura Ptime (senza la richiesta di un ordine sulla struttura). Uno dei primi risultati è dovuto ad Immerman e Lander, i quali mostrarono che FP+C cattura Ptime sulla classe degli alberi. Questo fu generalizzato in due distinte direzioni:

- Grohe nel 1998 mostrò che FP+C cattura Ptime nella classe dei grafi planari ([10]);
- Grohe e Mariño dimostrarono nel 1999 che FP+C cattura Ptime nella classe dei grafi a tree-width limitata ([11]).

La classe dei grafi planari e la classe dei grafi a tree-width limitata sono classi di grafi "chiusi per minori" (si veda la Definizione 3.1) I due risultati citati furono l'inizio di un percorso che portò al Teorema di Grohe [10] nel 2014.

**Teorema 3.2** (Grohe). *FP+C cattura Ptime in ogni classe propria chiusa per minori.*

Vediamo qualche definizione e teorema per inquadrare tale risultato.

**Definizione 3.1.** *Diciamo che un grafo  $H$  è un minore di  $G$  se  $H = G$  o  $H$  si può ottenere da  $G$  applicando una determinata successione delle seguenti operazioni:*

---

<sup>6</sup>d'ora in avanti con il termine "grafo" indicheremo sempre un grafo non orientato e privo di loop.

- eliminazione di un arco;
- eliminazione di un nodo e di tutti i relativi archi adiacenti;
- contrazione di un arco,

dove per contrazione di un arco si intende l'eliminazione di due nodi adiacenti e di tutti gli archi con un estremo su uno di essi e l'aggiunta di un nodo collegato a tutti i nodi a cui erano collegati i due nodi eliminati.

**Definizione 3.2.** Diciamo che una determinata classe  $\mathcal{C}$  di grafi è chiusa per minori se ogni minore di ogni grafo in  $\mathcal{C}$  è in  $\mathcal{C}$ .

Chiaramente ogni classe propria (cioè diversa dalla classe di tutti i grafi finiti) chiusa per minori esclude qualche grafo come minore, ovvero esiste un grafo che non è minore di alcun grafo della classe. Vale il seguente importante Teorema.

**Teorema 3.3** (Robertson e Seymour). In ogni collezione infinita di grafi  $\{G_i | i \in \omega\}$ , esistono  $i, j$  tale che  $G_i$  è un minore di  $G_j$ .

*Dimostrazione.* Si rimanda a [7]. □

In altre parole, dato un qualsiasi insieme numerabile di grafi ne esisteranno due tali che uno è un minore dell'altro.

**Notazione.** Data una classe chiusa per minori  $\mathcal{C}$ , sia  $\bar{\mathcal{C}}$  il suo complementare nella classe dei grafi finiti. Vale che  $\bar{\mathcal{C}} = \{G | G \text{ è un grafo che non è minore di nessun grafo in } \mathcal{C}\}$ . Denotiamo con  $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}$  l'insieme di tutti i grafi in  $\bar{\mathcal{C}}$  che sono minimali rispetto la relazione "essere minore di" in  $\bar{\mathcal{C}}$ .

Dal Teorema 3.3 si ottiene immediatamente il seguente.

**Corollario 3.1.** Sia  $\mathcal{C}$  una classe di grafi chiusa per minori. Allora esiste una collezione finita di grafi  $\mathcal{F}$  tale che  $G \in \mathcal{C}$  se e solo se per ogni  $F \in \mathcal{F}$ ,  $F$  non è un minore di  $G$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo che  $G \in \mathcal{C}$  se e solo se per ogni  $F \in \mathcal{N}_{\mathcal{C}}$ ,  $F$  non è un minore di  $G$ .

( $\rightarrow$ ) Sia  $G \in \mathcal{C}$ . Visto che  $\mathcal{N}_{\mathcal{C}} \subseteq \bar{\mathcal{C}}$  e  $\mathcal{C}$  è chiusa per minori otteniamo che  $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}$  è composta da grafi  $F$  che non sono minori di  $G$ .

( $\leftarrow$ ) Supponiamo per assurdo esista un grafo  $G$  tale che  $\forall F \in \mathcal{N}_{\mathcal{C}}$   $F$  non è minore di  $G$  e che  $G \in \bar{\mathcal{C}}$ . In particolare  $G \notin \mathcal{N}_{\mathcal{C}}$  quindi esiste  $G_1 \neq G$ ,  $G_1 \in \bar{\mathcal{C}}$  che è minore di  $G$ . Per ipotesi  $G_1 \notin \mathcal{N}_{\mathcal{C}}$ , quindi esiste  $G_2 \neq G_1$ ,  $G_2 \in \bar{\mathcal{C}}$  che è minore di  $G_1$ . Per transitività della relazione "essere minore di" avremo che  $G_2 \notin \mathcal{N}_{\mathcal{C}}$ . Proseguendo in questo modo si costruisce una successione  $G = G_0, G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$  di grafi in cui  $G_{n+1}$  è minore di  $G_n$  e questo non è possibile perché il grafo è finito (ogni passaggio diminuisce il numero di nodi o di archi).

Per il Teorema 3.3 segue che  $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}$  è finito, da cui la tesi. □

Fissati due grafi  $G, H$ , decidere se  $H$  è un minore di  $G$  è un problema risolvibile in tempo polinomiale. Grazie a ciò, il Corollario 3.1 ha conseguenze notevoli: l'appartenenza o meno di un grafo  $G$  ad una classe  $\mathcal{C}$ , di cui sono noti i minori proibiti  $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}$ , è risolvibile in tempo polinomiale. Questi risultati sono tasselli fondamentali che portarono, insieme all'immenso lavoro di Grohe, alla dimostrazione del Teorema 3.2.

Nella prossima sezione presenterò, un'ulteriore risultato di espressività della logica FP+C.

## 4 Catturare Ptime nella classe dei grafi ad intervallo

Nel seguito spiegheremo dettagliatamente gli elementi fondamentali per comprendere il risultato principale dell'articolo di Laubner [1]: nella classe dei grafi ad intervallo, una qualsiasi interrogazione booleana è computabile in tempo polinomiale se e solo se è definibile in  $\text{FP}+\text{C}$ . Per far questo mostreremo come costruire una mappa di canonizzazione, usando una decomposizione in moduli, per permettere l'applicazione del Teorema di Immerman-Vardi (3.1), da cui seguirà la tesi. Mostriamo che  $\text{FP}+\text{C}$  non è abbastanza espressivo per catturare Ptime sulle classi di grafi cordali e grafi incomparabili, le quali estendono la classe dei grafi ad intervallo.

### 4.1 Introduzione

In seguito al profondo risultato di espressività dovuto a Grohe, è naturale cercare di replicare tale approccio in classi di grafi definiti da un insieme di grafi proibiti come sottografi indotti. Infatti, ragionamenti simili a quanto fatto con classi di grafi chiusi per minori, sono immediatamente trasportabili a classi chiusi per sottografi.

Tuttavia, un risultato analogo al Teorema di Grohe (3.2) non vale, come mostrato in [11] e come mostreremo in seguito. Inoltre, non vale nemmeno un risultato analogo al Teorema di Robertson e Seymour (3.3) come mostra il seguente semplice esempio.

**Esempio 4.1.** *Mostriamo che esiste una collezione infinita di grafi  $\mathcal{C} = \{G_i \mid i \in \omega\}$  per cui  $\forall G, H \in \mathcal{C}$  con  $G \neq H$  vale che  $G$  non è sottografo di  $H$ . È sufficiente considerare l'insieme dei grafi  $\mathcal{C} = \{G_i \mid G_i \text{ è il ciclo con } i \text{ nodi, per } i \in \mathbb{N}\}$ .*

I risultati che seguiranno compongono un tassello nella comprensione dell'espressività di  $\text{FP}+\text{C}$  per classi di grafi chiusi per sottografi indotti. Esistono, inoltre, interessi negli aspetti algoritmici dei grafi ad intervallo in quanto trovano applicazione in problemi di sequenziamento del DNA ([12]) e problemi di schedulazione ([13]).

**Notazioni e preliminari** Denotiamo con  $\mathbb{N}$  i numeri interi non negativi e con  $\mathbb{N}_{>0}$  i numeri interi positivi. Per ogni  $m, n \in \mathbb{N}$  denotiamo con  $[n, m] := \{l \in \mathbb{N} \mid n \leq l \leq m\}$ .

Una relazione binaria  $<$  su un insieme  $X$  è detto *ordine parziale stretto* se è irreflessivo e transitivo.

Due elementi  $x, y$  di un insieme dotato di ordine parziale  $X$  sono detti *inconfrontabili* se non vale né  $x < y$  né  $y < x$ .

**Definizione 4.1.** *Chiamiamo  $<$  un ordine parziale stretto debole se è un ordine parziale stretto e l'inconfrontabilità risulta essere una relazione di equivalenza.*

Infine, un ordine lineare (stretto) è un ordine parziale stretto in cui non esistono due elementi inconfrontabili. Si noti che un ordine parziale debole  $<$  su  $X$  induce un ordine lineare su  $X/\approx$  definendo  $[x]_{\approx} < [y]_{\approx}$  se e solo se  $x < y$ , dove  $\approx$  è la relazione d'equivalenza data dalla relazione di inconfrontabilità. Verifichiamo che tale definizione sia ben posta. Siano  $x \approx x', y \approx y'$  con  $x \not\approx y$  e, supponendo che  $x < y$ , dimostriamo che  $x' < y'$ . Sia  $x', y'$  che  $x, y'$  sono necessariamente confrontabili (altrimenti  $[x]_{\approx} = [y]_{\approx}$ ). Inoltre dovrà valere che  $x < y'$  altrimenti, se avessimo  $y' < x$  otterremmo, per transitività di  $<$ , che  $y' < y$  contraddicendo  $y \approx y'$ . Supponiamo per assurdo  $y' < x'$ . Per transitività di  $<$  avremo che  $x' > x$  contraddicendo  $x \approx x'$ . Otteniamo dunque che  $x' < y'$ .

D'ora in avanti tutti i grafi sono assunti finiti, semplici e non orientati (se non specificato diversamente). Per due grafi  $G, H$  isomorfi scriviamo  $G \cong H$ . Per  $W \subseteq V$  insieme di vertici, denotiamo con  $G[W]$  il grafo indotto da  $G$  su  $W$ . Denotiamo con  $N(v) = \{w \in V \mid w = v \vee (v, w) \in E\}$ .

**Definizione 4.2.** Sia  $G = (V, E)$  e  $W \subseteq V$  una clique per  $G$  (cioè  $G[W]$  è un grafo completo).  $W$  è detto clique massimale se  $\forall v \in V \setminus W$  vale che  $W \cup \{v\}$  non è più una clique.

## 4.2 Definizioni e proprietà

**Definizione 4.3.** Sia  $\mathcal{I}$  un multiinsieme finito  $\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_n\}$  di intervalli chiusi  $I_i = [a_i, b_i] \subset \mathbb{N}_{>0}$  (con possibili ripetizioni). Il grafo  $G_{\mathcal{I}} = (V, E)$  con  $V = \mathcal{I}$  ed  $(I_i, I_j) \in E$  se e solo se  $i \neq j$  e  $I_i \cap I_j \neq \emptyset$  è detto grafo ad intervalli. Il multiinsieme di intervalli chiusi  $\mathcal{I}$  è una rappresentazione ad intervalli di  $G$  se  $G \cong G_{\mathcal{I}}$ .

Usiamo il termine *multiinsieme* di intervalli per ammettere più copie di uno stesso intervallo. Ad esempio il multiinsieme  $\mathcal{I} = \{\{1\}, \{1\}, \{1\}\}$  è una rappresentazione ad intervalli per un grafo completo con 3 nodi (nel multiinsieme i tre oggetti di  $\mathcal{I}$  sono da considerare distinti).

**Definizione 4.4.** Una rappresentazione ad intervalli  $\mathcal{I}$  è detta minimale se  $\bigcup \mathcal{I} \subset \mathbb{N}_{>0}$  è di cardinalità minima tra tutte le rappresentazioni possibili di  $G_{\mathcal{I}}$ .

Ad esempio il multiinsieme  $\mathcal{I} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$  è una rappresentazione non minimale per un grafo completo con 3 nodi.

**Notazione.** Denotiamo con  $M(k) = \{I_i \mid k \in I_i\}$  per  $k \in \mathbb{N}_{>0}$ .

Si nota che ogni rappresentazione  $\mathcal{I}$  può essere ridotta ad una minimale eliminando un sottoinsieme di  $\mathbb{N}$  dagli intervalli in  $\mathcal{I}$  nel modo seguente. Per ogni  $n, m \in \mathbb{N}$  distinti tali che  $M(n) \neq \emptyset$  e  $M(n) \subseteq M(m)$  (cioè gli  $I_i \in M(n)$  si intersecano anche perché contengono  $m$ ), possiamo considerare il multiinsieme degli intervalli  $\mathcal{I}'$  ottenuto cancellando  $n$  da ogni  $I \in \mathcal{I}$  e trasformando tutti i  $k > n$  in  $k - 1$ . Si ottiene così un multiinsieme  $\mathcal{I}'$  di intervalli tale che  $G = G_{\mathcal{I}} = G_{\mathcal{I}'}$  e  $\bigcup \mathcal{I}' \subset \bigcup \mathcal{I}$  (abbiamo eliminato un numero naturale dalla rappresentazione). Per ottenere una rappresentazione minimale  $\mathcal{I}^{(k)}$  si può iterare la precedente costruzione (ottenendo così una successione di multiinsiemi di intervalli  $\mathcal{I}', \mathcal{I}'', \dots, \mathcal{I}^{(k)}$  che inducono lo stesso grafo  $G$ ) fino a che non esistono più  $n, m \in \mathbb{N}$  distinti per cui  $M(n) \subseteq M(m)$ . Notiamo inoltre che dalla dimostrazione precedente segue che, in ogni rappresentazione minimale,  $M(n) \subseteq M(m)$  e  $M(n) \neq \emptyset$  implica  $n = m$ .

Per comodità di scrittura assumeremo che, in ogni rappresentazione ad intervalli, valga che  $\bigcup \mathcal{I}$  sia un segmento iniziale di  $\mathbb{N}_{>0}$ .

**Notazione.** Sia  $\mathcal{I}$  un multiinsieme di intervalli e  $G_{\mathcal{I}}$  il grafo indotto da tale rappresentazione. Indicheremo con  $I_v$  l'intervallo in  $\mathcal{I}$  associato a  $v \in G_{\mathcal{I}}$ .

**Proposizione 4.1.** Sia  $\mathcal{I} = \{I_i\}_{i \in [1, n]}$  una rappresentazione ad intervalli minimale di  $G$ . Se  $M(k) \neq \emptyset$  per qualche  $k$ , allora  $M(k)$  forma una clique massimale. Viceversa, se  $M$  è una clique massimale di  $G$  allora per qualche  $k \in \mathbb{N}$  si ha che  $\bigcap_{v \in M} I_v = \{k\}$  e  $M(k) = M^7$ .

<sup>7</sup>identificando, qui e nel seguito, gli insiemi  $M$  e  $\{I_v : v \in M\}$



*Dimostrazione.* Se  $M(k) \neq \emptyset$  allora i nodi corrispondenti agli intervalli che contengono  $k$  sono tutti connessi fra loro. La clique è inoltre massimale perché qualunque altro intervallo che interseca tutti gli  $I_i \in M(k)$  dovrà necessariamente contenere  $k$  per minimalità della rappresentazione: se, dato un intervallo  $I \in \mathcal{I}$ , l'insieme  $\{I\} \cup M(k)$  fosse ancora una clique, si avrebbe  $I \cap I_i \neq \emptyset$  per ogni  $I_i \in M(k)$ ; questa a sua volta implicherebbe l'esistenza di  $j \in \mathbb{N}_{>0}$  per cui  $M(k) \subseteq M(j)$ , da cui segue  $j = k$  per minimalità della rappresentazione.

Viceversa, se  $M$  è una clique massimale per  $G$  allora  $M$  contiene nodi i cui corrispondenti intervalli si intersecano a due a due; trattandosi di intervalli essi si dovranno tutti intersecare in almeno un punto. Inoltre, se  $j \in \bigcap \{I_v : v \in M\}$  si ha  $\{I_v : v \in M\} \subseteq M(j)$  e quindi  $M = M(j)$  per massimalità di  $M$ . In particolare  $\forall j, k \in \bigcap \{I_v : v \in M\}$  vale  $M(j) = M(k) = M$  da cui  $j = k$  per minimalità della rappresentazione.  $\square$

Dalla proposizione precedente possiamo costruire un criterio per verificare se un grafo  $G$  ammette una rappresentazione ad intervalli.

**Proposizione 4.2.** *Un grafo  $G$  è ad intervalli se e solo se le sue clique massimali possono essere ordinate in modo tale che ciascun nodo appartenga a clique massimali consecutive.*

*Dimostrazione.* ( $\rightarrow$ ) Se  $G$  è un grafo ad intervalli, allora una qualsiasi rappresentazione minimale  $\mathcal{I}$  di  $G$  permette di ottenere il seguente ordine delle clique massimali  $\triangleleft_{\mathcal{I}}$  che soddisfa la proprietà desiderata:  $M(1) \triangleleft_{\mathcal{I}} M(2) \triangleleft_{\mathcal{I}} \cdots \triangleleft_{\mathcal{I}} M(n)$  (si ignorano i  $k$  per cui  $M(k) = \emptyset$ ). Infatti, se  $v \in M(i) \cap M(j)$  con  $i < j$  e  $i < h < j$  allora  $i, j \in I_v$  da cui segue  $h \in I_v$  e  $v \in M(h)$ .

( $\leftarrow$ ) Sia  $M_1 < \cdots < M_n$  un ordine delle clique massimali per cui ciascun nodo appartiene a clique massimali consecutive. Costruiamo una rappresentazione ad intervalli per  $G$ . Ad ogni nodo  $v$  associamo l'intervallo  $I_v = [a_v, b_v]$  dove  $a_v$  e  $b_v$  sono rispettivamente il minimo e massimo indice delle clique massimali a cui il nodo appartiene. Il multiinsieme  $\mathcal{I}$  degli intervalli così costruiti forma una rappresentazione ad intervalli per  $G = (V, E)$ : mostriamo che  $\forall v, v' \in V$  con  $v \neq v'$  vale che  $(v, v') \in E$  se e solo se  $I_v \cap I_{v'} \neq \emptyset$ . Se  $(v, v') \in E$  allora  $v, v'$  devono essere contenuti in una stessa clique massimale  $M_j$ . Visto che  $v, v'$  sono contenuti in clique massimali consecutive, avremo che  $I_v \cap I_{v'} \neq \emptyset$ . Viceversa, se  $I_v \cap I_{v'} \neq \emptyset$  e  $j \in I_v \cap I_{v'}$  abbiamo che  $j \in [a_v, b_v] \cap [a_{v'}, b_{v'}]$ , da cui segue  $\{v, v'\} \subseteq M_j$  e quindi  $(v, v') \in E$ . Inoltre notiamo che se  $v \neq v'$  i due intervalli  $I_v$  e  $I_{v'}$ , pur potendo coincidere come intervalli, verranno sempre rappresentati da nodi distinti in  $G_{\mathcal{I}}$ .  $\square$

**Notazione.** *Sia  $G$  un grafo ad intervalli e  $\mathcal{I}$  una sua rappresentazione. Denotiamo con  $\triangleleft_{\mathcal{I}}$  il seguente ordine lineare sull'insieme delle clique massimali di  $G$ :  $M(1) \triangleleft_{\mathcal{I}} M(2) \triangleleft_{\mathcal{I}} \cdots \triangleleft_{\mathcal{I}} M(n)$  (si ignorano i  $k$  per cui  $M(k) = \emptyset$ ).*

**Osservazione.** *Si noti che se  $\mathcal{I}$  è una rappresentazione minimale ad intervalli per il grafo  $G$  con la convenzione che  $\bigcup \mathcal{I}$  sia un segmento iniziale di  $\mathbb{N}_{>0}$ , i  $k \in \mathbb{N}_{>0}$  per cui  $M(k) = \emptyset$  sono tali che  $k > \max$ , con  $\max \in \mathbb{N}_{>0}$  il più grande naturale che è contenuto in qualche  $I \in \mathcal{I}$ .*

Si ha dunque che ogni rappresentazione ad intervalli  $\mathcal{I}$  per  $G$  induce un ordine lineare  $\triangleleft_{\mathcal{I}}$  delle clique massimali di  $G$ .

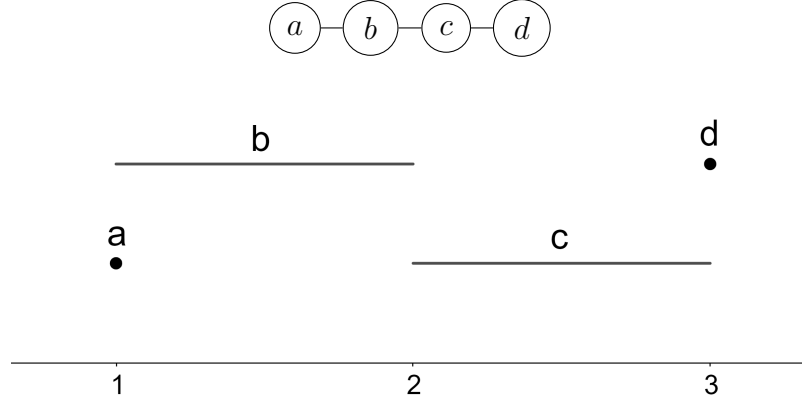


Figura 2:  $M(2)$  non può essere un possibile inizio

**Definizione 4.5.** Una clique massimale  $C$  è un possibile inizio di  $G$  se esiste una rappresentazione ad intervalli  $\mathcal{I}$  minimale di  $G$  per cui  $C$  è minimo per  $\triangleleft_{\mathcal{I}}$ .

**Esempio 4.2.** Vediamo che, dato il grafo indotto dalla rappresentazione ad intervalli  $\mathcal{I} = \{I_a, I_b, I_c, I_d\}$  in Figura 2, non esiste una rappresentazione in cui  $M(2) = \{I_b, I_c\}$  è un inizio per  $G_{\mathcal{I}}$ . Denotiamo con  $\mathcal{I}' = \{I'_a, I'_b, I'_c, I'_d\}$  un'altra qualsiasi rappresentazione di  $G$  e con  $M'(1)$  la clique degli intervalli di  $\mathcal{I}'$  contenenti 1.

Le clique massimali di  $G$  sono  $\{a, b\}$ ,  $\{b, c\}$  e  $\{c, d\}$ . Se  $M'(1) = \{I'_b, I'_c\}$ , poiché ogni vertice del grafo deve appartenere a clique massimali consecutive, considerando il vertice  $b$  otteniamo  $M'(2) = \{I'_a, I'_b\}$ . Quindi  $M'(3) = \{I'_c, I'_d\}$ , ma si verifica una contraddizione in quanto il vertice  $c$  non appartiene a clique massimali consecutive.

**Osservazione.** Si noti che qualsiasi sottografo di un grafo ad intervalli è anch'esso un grafo ad intervalli. Questo perché un qualsiasi sottografo  $H$  di  $G = G_{\mathcal{I}}$  si può ottenere da  $H = G_{\mathcal{I}'}$ , con  $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$  ottenuto eliminando gli intervalli  $I_v$  da  $\mathcal{I}$  per ogni nodo  $v$  non in  $H$ . Qualsiasi classe di grafi con tale proprietà è caratterizzata da una lista (possibilmente infinita, vedere l'Esempio 4.1) di grafi "proibiti". Una famiglia infinita di grafi proibiti che definisce la classe dei grafi ad intervalli è data da Lekkerkerker e Boland in [14].

Adesso che abbiamo tutte le definizioni necessarie chiarite, enunciamo il teorema che Laubner dimostra nel suo articolo [1].

**Teorema 4.1.**  $FP+C$  cattura  $P$ time nella classe dei grafi ad intervallo.

È possibile inoltre adattare la dimostrazione sopra per ottenere anche il seguente fatto.

**Corollario 4.1.** La classe dei grafi ad intervallo è definibile in  $FP+C$ .

### 4.3 La logica $FP+C$ e il concetto di canonizzazione

Come visto nella Sezione 2.4, la logica  $FP+C$  lavora con strutture bicomposte. Una struttura bicomposta si ottiene da un grafo  $G = (V, E)$  considerando la struttura  $G^* := (V, [1, |V|], E, <)$ , con dominio  $V \dot{\cup} [1, |V|]$ , in modo tale che  $E$  sia la relazione

di adiacenza che definisce il grafo  $G$  su  $V$  e  $<$  sia l'ordine lineare dei naturali su  $[1, |V|] \subset \mathbb{N}_{>0}$ .

Come già osservato, FP+C non è espressivo abbastanza per catturare Ptime. Questo fatto sarà utilizzato in seguito per dimostrare altri risultati di inesprimibilità su specifiche classi di grafi.

In particolare, faremo uso della nozione di *interpretazione tra grafi* (la quale è un caso particolare della più generale interpretazione sintattica).

**Definizione 4.6.** Una interpretazione  $l$ -aria tra grafi è una tupla

$$\Gamma = (\gamma_V(\vec{x}), \gamma_E(\vec{x}, \vec{y}))$$

di FO-formule con vocabolario  $\{E, =\}$  in modo che  $|\vec{x}| = |\vec{y}| = l$ . Denotiamo con  $\Gamma[G] = (V_\Gamma, E_\Gamma)$  il grafo con insieme dei vertici  $V_\Gamma = \gamma_V^G[\cdot] = \{\vec{a} \in A^l : G \models \gamma_V(\vec{a})\}$  e insieme degli archi  $E_\Gamma = \gamma_E^G(\cdot, \cdot) = \{(\vec{a}, \vec{b}) \in A^l \times A^l : G \models \gamma_E(\vec{a}, \vec{b})\}$ .

La dimostrazione del seguente lemma per formule di FO si trova ad esempio in [15] e può essere generalizzata a FP+C (omettiamo la dimostrazione).

**Lemma 4.1** (Interpretazione tra grafi). Sia  $\Gamma$  una interpretazione  $l$ -aria tra grafi. Allora per ogni FP+C-formula  $\varphi$  esiste un formula  $\varphi^{-\Gamma}$  in FP+C tale che

$$G \models \varphi^{-\Gamma} \iff \Gamma[G] \models \varphi.$$

Come già introdotto, la dimostrazione del Teorema 4.1 sarà svolta per mezzo di una "canonizzazione": l'obiettivo è quello di costruire una copia isomorfa del grafo  $G = (V, E)$  nella struttura numerica  $([1, |V|], <)$ . Questo sarà realizzato costruendo una FP+C-formula  $\varepsilon(\mu, \nu)$ , con  $\mu, \nu$  variabili numeriche, tale che per ogni grafo ad intervallo  $G = (V, E)$ , la struttura  $([1, |V|], \varepsilon^G[\cdot, \cdot])$  sia isomorfa a  $G = (V, E)$ . Vediamo perché questo è sufficiente a dimostrare il Teorema 4.1.

Denotiamo con  $\mathcal{K}$  una qualsiasi interrogazione booleana su grafi ad intervallo in Ptime. Vogliamo fare vedere che esiste una FP+C-formula  $\psi^*$  tale che  $G \in \mathcal{K} \iff G^* \models \psi^*$ . Con le precedenti considerazioni, valgono le seguenti equivalenze:

$$\begin{aligned} G \in \mathcal{K} &\iff ([1, |V|], \varepsilon^G[\cdot, \cdot]) \in \mathcal{K} \iff ([1, |V|], \varepsilon^G[\cdot, \cdot], <) \in \mathcal{K}_< \\ &\iff ([1, |V|], \varepsilon^G[\cdot, \cdot], <) \models \psi, \end{aligned}$$

dove la seconda equivalenza è per Definizione 1.5, la terza è applicazione del teorema di Immerman-Vardi (dove  $\psi$  è la FP-formula che definisce la classe  $\mathcal{K}_<$ ). Consideriamo la seguente interpretazione tra grafi (Definizione 4.6)  $\Gamma : \gamma_V(\mu) := 0 < \mu \leq |V|$ ;  $\gamma_E(\mu, \nu) := \varepsilon(\mu, \nu)$ . Avremo che  $\Gamma(G^*) = ([1, |V|], \varepsilon^G(\cdot, \cdot))$ . Per il Lemma 4.1 otteniamo che

$$G \in \mathcal{K} \iff (\Gamma(G^*), <) \models \psi \iff G^* \models \psi^{-\Gamma}.$$

Dunque la formula  $\psi^{-\Gamma} \in \text{FP+C}$  definisce  $\mathcal{K}$  come volevamo.

## 4.4 Risultati di inesprimibilità di FP+C

In questa sezione mostreremo che FP+C non cattura Ptime né sulla classe dei grafi incomparabili (Corollario 4.2) né sulla classe dei grafi cordali. Vedremo inoltre il legame fra queste due classi e la classe dei grafi ad intervallo (Teorema 4.4).

Le dimostrazioni sono basate sul teorema seguente ([6]).

**Teorema 4.2** (Cai, Fürer, Immerman). *Esiste una proprietà  $\mathcal{P}_{CFI}$  Ptime-decidibile ma non FP+C definibile.*

La proprietà  $\mathcal{P}_{CFI}$  è legata al problema dell'isomorfismo fra grafi, un problema che in generale è in NP ma che su grafi di grado 3 diventa polinomiale. Il problema  $\mathcal{P}_{CFI}$  è una riduzione "unaria" dell'isomorfismo fra grafi di grado 3. La dimostrazione che  $\mathcal{P}_{CFI}$  non è esprimibile in FP+C è troppo complicata per essere riportata in questa tesi.

**Definizione 4.7.** *Un grafo  $G = (V, E)$  si dice bipartito se esistono due insiemi di vertici (detti sponde)  $U, W \subseteq V$  con  $U \cap W = \emptyset$  e  $U \cup W = V$  tali che  $\forall (a, b) \in E$  vale che  $a \in U$  se e solo se  $b \in W$ .*

**Definizione 4.8.** *Per ogni grafo  $G = (V, E)$ , definiamo il grafo di incidenza  $G^I = (V \cup E, F)$  con  $(v, e) \in F$  se  $v \in V$  e  $\exists w e = (v, w) \in E$ .*

Si osserva che  $G^I$  è bipartito. Costruiamo una interpretazione tra grafi  $\Gamma$  (si veda la Definizione 4.6) tale che per ogni grafo  $G$  vale che  $\Gamma[G] \cong G^I$ . Denotiamo con  $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2)$  e consideriamo:

- $\gamma_V(\vec{x}) := (x_1 = x_2) \vee E(x_1, x_2)$ , così da ottenere come dominio di  $\Gamma[G]$  sia i vertici del grafo  $G$  che gli archi  $(x, y) \in E$ ;
- per definire gli archi di  $\Gamma[G]$  useremo la formula  $\gamma_E(\vec{x}, \vec{y}) := (x_1 = x_2) \wedge E(y_1, y_2) \wedge ((x_1 = y_1) \vee (x_1 = y_2))$ .

Otteniamo che, per il Lemma 4.1, per ogni FP+C-formula  $\varphi$  esiste un formula  $\varphi^{-\Gamma}$  tale che  $G \models \varphi^{-\Gamma} \iff \Gamma[G] \models \varphi$ . Useremo questo risultato nel Teorema 4.3. Inoltre, dato un grafo  $G^I$ , è possibile ricostruire  $G$  da  $G^I$  in modo univoco con un algoritmo polinomiale, vediamo come. Dalla definizione di  $G^I$  abbiamo che ciascun nodo della sponda  $E$  avrà grado esattamente 2. In particolare, per ogni nodo  $e$  di  $E \subseteq V \cup E$  avremo che  $e$  è legato proprio ai due nodi a cui faceva da arco in  $G$ , da cui il facile algoritmo per ricostruire  $G$ .

Inoltre, siccome le due sponde di un grafo bipartito si possono trovare in tempo lineare, si riesce facilmente a decidere se un dato grafo  $H$  sia isomorfo a  $G^I$  per qualche grafo  $G$ .

**Teorema 4.3.** *FP+C non cattura Ptime nella classe dei grafi bipartiti.*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{P}^I := \{H \mid H \cong G^I \text{ per qualche } G \in \mathcal{P}_{CFI}\}$ , con  $\mathcal{P}_{CFI}$  la proprietà enunciata nel Teorema 4.2. Dalle osservazioni sopra,  $\mathcal{P}^I$  è Ptime-decidibile.

Supponiamo che FP+C catturi Ptime sulla classe dei grafi bipartiti. Dunque esiste una FP+C-formula  $\varphi$  tale che per ogni grafo bipartito  $H$  vale che  $H \models \varphi$  se e solo se  $H \in \mathcal{P}^I$ . Dal lemma sulle interpretazioni tra grafi (4.1) otteniamo una formula  $\varphi^{-\Gamma}$  tale che  $G \models \varphi^{-\Gamma}$  se e solo se  $G^I \cong \Gamma[G] \models \varphi$  se e solo se  $G \in \mathcal{P}_{CFI}$ . Dunque  $\varphi^{-\Gamma}$  definisce  $\mathcal{P}_{CFI}$ , contraddicendo il Teorema 4.2.  $\square$

Otteniamo come corollari altri risultati di inesprimibilità.

**Definizione 4.9.** *Un grafo  $G = (V, E)$  si dice comparabile se esiste un ordine parziale  $<$  sull'insieme dei vertici  $V$  tale che  $(u, v) \in E$  se e solo se  $u, v$  sono confrontabili rispetto all'ordine parziale  $<$  (irriflessivo e transitivo).*

**Lemma 4.2.** *Ogni grafo bipartito  $G = (U \dot{\cup} W, E)$  è un grafo comparabile.*

*Dimostrazione.* Si può definire l'ordine parziale stretto  $<$  su  $U \dot{\cup} W$  ponendo  $u < v$  se e solo se  $u \in U, v \in W$  e  $(u, v) \in E$ .  $\square$

**Corollario 4.2.** *FP+C non cattura Ptime sulla classe di grafi comparabili.*

Il corollario precedente implica che la proprietà di comparabilità o incomparabilità per i grafi non è sufficiente a permettere la costruzione di una FP+C-canonizzazione.

**Definizione 4.10.** *Un grafo si dice cordale se non ha cicli indotti (cioè sottografi che siano cicli) di lunghezza  $\geq 4$ .*

Per un risultato dovuto a Grohe vale che FP+C non cattura Ptime nella classe dei grafi cordali [16].

Vale la seguente caratterizzazione.

**Teorema 4.4.** *Un grafo ammette rappresentazione ad intervalli se e solo se è un grafo incomparabile (cioè l'insieme dei non-archi di  $G$  forma un grafo comparabile) e cordale.*

*Dimostrazione.* ( $\rightarrow$ ) Sia  $G$  una componente connessa di un grafo ad intervalli e  $\mathcal{I}$  una sua rappresentazione. Dimostriamo che  $G$  è cordale. Supponiamo per assurdo esistano  $n \geq 4$  nodi  $v_1, \dots, v_n$  con  $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1) \in E$  che formano un ciclo indotto (non ci sono altre relazioni tra i nodi  $v_1, \dots, v_n$  oltre a quelle esplicitate). Denotiamo con  $I_{v_1} = [a_1, b_1], \dots, I_{v_n} = [a_n, b_n]$  e supponiamo senza perdita di generalità che  $a_i \leq a_j$  per ogni  $i < j$ . Affinché siano soddisfatte le relazioni di adiacenza indicate sopra avremo che  $b_1 \geq a_2, b_2 \geq a_3, \dots, b_{n-1} \geq a_n$  e che  $[a_n, b_n] \cap [a_1, b_1] \neq \emptyset$ . Inoltre, supponendo che  $a_n \leq b_1$ , da  $a_2 \leq a_n$  e  $[a_2, b_2] \cap [a_n, b_n] = \emptyset$  si avrebbe  $b_2 < a_n \leq b_1$  e da  $b_2 \geq a_3$  si otterrebbe  $a_1 \leq a_3 \leq b_1$ , quindi  $(v_1, v_3) \in E$  contrariamente alle ipotesi, dunque deve valere che  $a_n > b_1$ , il che contraddice  $[a_n, b_n] \cap [a_1, b_1] \neq \emptyset$ .

Dimostriamo che  $G$  è incomparabile. Sia  $<$  la relazione su  $\mathcal{I}$  definita come segue:  $I_v = [a_v, b_v] < I_w = [a_w, b_w]$  se  $I_v \cap I_w = \emptyset$  e  $b_v < a_w$  (cioè il primo intervallo è a sinistra del secondo, senza intersezioni). L'ordine  $<$  così definito è banalmente transitivo e irriflessivo. Inoltre, tra tutte le possibili coppie di nodi si ha  $(v, w) \notin E$  se e solo se  $I_v < I_w$  o  $I_w < I_v$  (altrimenti gli intervalli si intersecherebbero), il che termina la dimostrazione.

( $\leftarrow$ ) Si veda [17, Teorema 8.1].  $\square$

**Osservazione.** *Sfruttando questa caratterizzazione è facile vedere che la classe dei grafi ad intervallo non è chiusa per minori. Ad esempio, è sufficiente considerare una 4-clique e costruire il minore eliminando le due corde (le diagonali del quadrato). Quindi il risultato che mostreremo in questa tesi, ovvero il fatto che FP+C catturi Ptime sui grafi ad intervallo, non è conseguenza del Teorema di Grohe (3.2).*

In seguito dimostreremo che Ptime su grafi incomparabili e cordali (ovvero tali che ammettono rappresentazione ad intervalli) è effettivamente catturato da FP+C. Tuttavia, come visto sopra, esistono proprietà polinomiali che non sono esprimibili in FP+C sia per la classe dei grafi incomparabili sia per la classe dei grafi cordali.

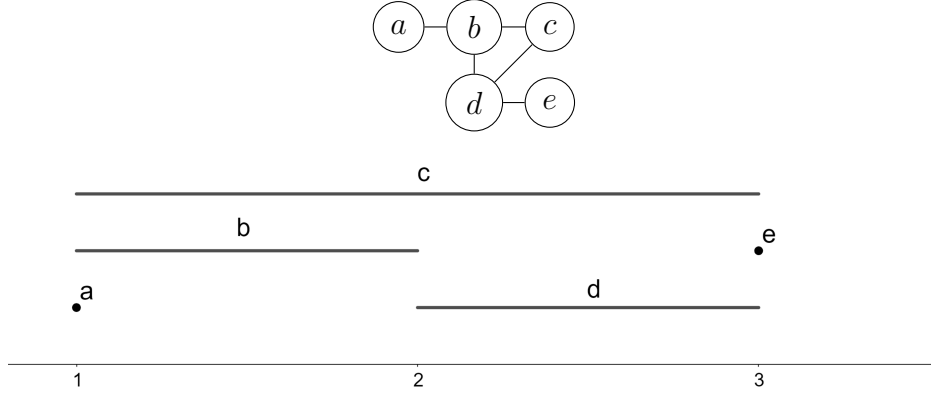


Figura 3: Lemma 4.3

## 4.5 Canonizzazione definibile in $\text{FP}+\text{C}$

L'obiettivo di questa ultima sezione è quello di introdurre le proprietà necessarie alla comprensione della dimostrazione di Laubner nel suo articolo [1]. Il Teorema 4.1 viene dimostrato per mezzo di una canonizzazione. Bisogna cioè costruire una  $\text{FP}+\text{C}$ -formula numerica  $\varepsilon(\mu, \nu)$  in modo che per ogni grafo ad intervallo  $G = (V, E)$  valga che  $([1, |V|], \varepsilon^G(\cdot, \cdot))$  definisca un grafo isomorfo nella componente numerica di  $G^*$ . Per realizzare una tale formula avremo bisogno di indagare, con minuziosità, la struttura dei grafi ad intervallo. Il seguente lemma risulterà fondamentale per poter definire in FO le clique massimali di un grafo ad intervallo.

**Lemma 4.3.** *Sia  $G = (V, E)$  un grafo ad intervalli e sia  $M$  una clique massimale di  $G$ . Allora esistono  $u, v \in M$  vertici, non necessariamente distinti, tale che  $M = N(u) \cap N(v)$ .*

Vediamo un esempio per comprendere l'enunciato. Si consideri la rappresentazione ad intervalli in Figura 3 di un grafo  $G$ . Si ha che  $N(a) = \{a, b, c\}$ ,  $N(b) = \{a, b, c, d\}$ ,  $N(c) = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $N(d) = \{b, c, d, e\}$ ,  $N(e) = \{c, d, e\}$ . In questo caso  $M(1) = N(a) \cap N(a) = N(a) \cap N(b) = N(a) \cap N(c)$  e analogamente ci sono tre coppie di vertici che definiscono la clique massimale  $M(3)$ , mentre  $M(2) = N(b) \cap N(d)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{I}$  una rappresentazione ad intervalli di  $G$  minimale. Assumiamo che  $M$  sia la  $\prec_{\mathcal{I}}$ -minima clique massimale. Se  $M$  è l'unica clique massimale di  $G$  allora il grafo  $G$  è completo e  $M = N(u)$  per un qualsiasi nodo  $u$  di  $G$ . Supponiamo adesso che  $X$  sia il successore di  $M$  secondo  $\prec_{\mathcal{I}}$ . Essendo  $M \neq X$  esiste  $v \in M \setminus X$  ed  $M$  è l'unica clique massimale contenente  $v$  (siccome  $v$  deve essere contenuta in clique massimali consecutive). Visto che  $M \subseteq N(v)$  e  $v$  è in relazione con solo nodi di  $M$  si ha che  $M = N(v)$ . Una argomentazione simmetrica vale nel caso in cui  $M$  sia  $\prec_{\mathcal{I}}$ -massimo. Rimane da dimostrare il caso in cui  $M$  non sia né minimo né massimo rispetto ad  $\prec_{\mathcal{I}}$ . Siano  $X, Y$  rispettivamente il precedente ed il successore di  $M$ . Dunque esistono  $x \in M \setminus X$  ed  $y \in M \setminus Y$ . Vogliamo dimostrare che  $M = N(x) \cap N(y)$ . Poiché  $M$  è una clique, ogni vertice di  $M$  è contenuto sia in  $N(x)$  che in  $N(y)$  quindi  $M \subseteq N(x) \cap N(y)$ . Sia  $u \in N(x) \cap N(y)$ , e scriviamo  $I_u = [a, b]$ . Sia  $k$  l'unico intero tale che  $M(k) = M$ . Allora  $(u, x) \in E$  implica che  $b \geq k$  e  $(u, y) \in E$  implica che  $a \leq k$ . Dunque  $k \in I_u$  e  $u \in M(k) = M$  il che termina la dimostrazione.  $\square$

Il lemma precedente ci presenta la possibilità di definire tutte le clique massimali attraverso una relazione di equivalenza su  $V^2$ . Questo perché una qualsiasi coppia di nodi identifica in modo unico una clique massimale (o eventualmente l'insieme vuoto) e tutte le clique massimali sono identificate da almeno una coppia di vertici. In particolare, dati  $(a, b), (c, d) \in V^2$  definiamo  $(a, b) \sim (c, d)$  se e solo se  $N(a) \cap N(b) = N(c) \cap N(d)$ . In questo modo identifichiamo le clique massimali di un grafo ad intervalli  $G = (V, E)$  con elementi dell'insieme  $V^2 / \sim$ , per una relazione d'equivalenza  $\sim$  che è FO-definibile.

**Notazione.** Per ogni  $v \in V$ , denotiamo con  $\text{span}(v)$  il numero di clique massimali di  $G$  contenenti  $v$ .

Osserviamo che  $\text{span}(v)$ , in grafi ad intervallo indotti da una rappresentazione minimale  $\mathcal{I}$ , coincide con la lunghezza dell'intervallo associato  $I_v \in \mathcal{I}$  per la Proposizione 4.2.

Siccome le classi di equivalenza possono essere contate,  $\text{span}(v)$  è FP+C definibile sulla classe dei grafi ad intervallo.

**Primi spunti per la costruzione di una canonizzazione** In questa sezione costruiremo una canonizzazione con l'ipotesi di avere un ordine lineare delle clique massimali indotto da una rappresentazione ad intervalli definibile in FP+C. Successivamente mostreremo come un ordine delle clique massimali FP+C definibile si possa costruire.

**Definizione 4.11.** Sia  $G = (V, E)$  un grafo ad intervallo e  $\prec$  un ordine lineare delle clique massimali indotto da una rappresentazione ad intervalli di  $G$ . Definiamo la relazione binaria  $<^G$  sui vertici di  $G$  come segue. Per  $x \in V$ , sia  $A_x$  la  $\prec$ -minima clique di  $G$  contenente  $x$ , definiamo  $<^G$ :

$$x <^G y: \iff \begin{cases} A_x \prec A_y, \text{ oppure} \\ A_x = A_y \text{ e } \text{span}(x) < \text{span}(y). \end{cases}$$

Si verifica facilmente che  $<^G$  è un ordine stretto debole su  $V$ : l'irriflessività e la transitività sono banali. Vediamo che l'inconfrontabilità risulta essere una relazione d'equivalenza:  $x, y \in V$  sono inconfrontabili se e solo se  $A_x = A_y$  e  $\text{span}(x) = \text{span}(y)$  il che è banalmente una relazione di equivalenza. Inoltre, se  $x, y$  sono inconfrontabili allora vale che  $(x, y) \in E$  e  $N(x) = N(y)$  perché  $x$  e  $y$  appartengono alle stesse clique massimali; infatti:

- sono contenuti nello stesso numero di clique massimali;
- appartengono alla stessa  $\prec$ -minima clique massimale;
- devono esser contenuti in clique massimali consecutive.

Ne segue che se  $x, y$  risultano  $<^G$ -inconfrontabili allora gli intervalli  $I_x$  e  $I_y$  in una rappresentazione minimale  $\mathcal{I}$  di  $G$  devono coincidere. Vediamo un esempio.

**Esempio 4.3.** Consideriamo il grafo  $G = G_{\mathcal{I}}$  indotto dalla rappresentazione  $\mathcal{I}$  in Figura 4. Consideriamo come ordine lineare delle clique massimali quello indotto dalla rappresentazione  $\mathcal{I}$ , cioè  $\prec = \prec_{\mathcal{I}}$ . In seguito denoteremo i nodi di  $G_{\mathcal{I}}$  con la stessa lettera che denota l'intervallo associato. Abbiamo che  $A_a, A_b, A_d, A_e \prec_{\mathcal{I}} A_h, A_l \prec_{\mathcal{I}} A_c$  dunque  $a, b, d, e <^G h, l <^G c$ . Siccome  $\text{span}(a), \text{span}(b) < \text{span}(d) < \text{span}(e)$  varranno anche

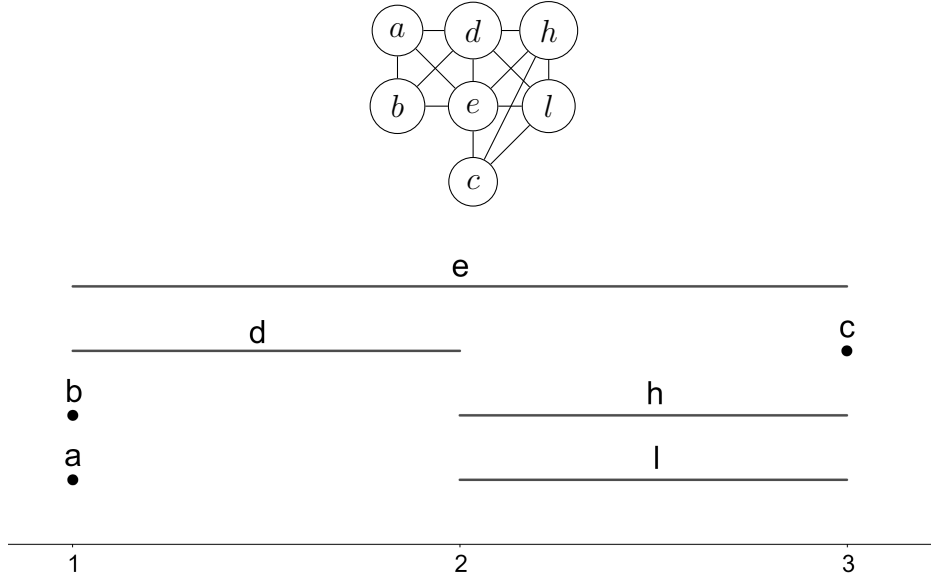


Figura 4: Esempio 4.3

le relazioni  $a, b <^G d <^G e$ . Notiamo inoltre che  $A_a = A_b$  e  $\text{span}(a) = \text{span}(b)$ , dunque  $a, b$  formano una classe delle relazione di equivalenza sugli elementi inconfrontabili dell'ordine  $<^G$ . Lo stesso vale per i nodi  $h, l$ . Si nota che l'ordine stretto  $<^G$  risulta effettivamente essere parziale e debole.

Costruiamo la canonizzazione di  $G$  (con l'ipotesi di avere un ordine lineare sulle clique massimali  $\prec$  definibile in FP+C): se  $[v]$  denota la classe di equivalenza di tutti i vertici inconfrontabili con  $v$  rispetto l'ordine  $<^G$ , allora i nodi in  $[v]$  li rappresentiamo con i numeri dell'intervallo  $[a + 1, a + |[v]|]$ , con  $a$  il numero di vertici  $<^G$ -minori di  $v$ . Siccome tutti i vertici in  $[v]$  formano le stesse adiacenze con i vertici in  $G \setminus [v]$  e  $[v]$  forma una clique, è chiaro come definire le relazioni di adiacenza sulla struttura numerica.

**Osservazione.** *La procedura di canonizzazione realizzata potrebbe mappare grafi isomorfi in grafi isomorfi non necessariamente identici (ovvero l'identità su  $\mathbb{N}_{>0}$  potrebbe non essere un isomorfismo).*

**Estrarre informazioni dall'ordine delle clique massimali** La canonizzazione proposta al paragrafo precedente si basa sull'ipotesi di avere un ordine lineare delle clique massimali FP-definibile. In questo paragrafo vedremo come realizzare un tale ordine.

Notiamo che, se  $\mathcal{I}$  è una rappresentazione minimale di  $G$ , vale la seguente proprietà: se  $C \triangleleft_{\mathcal{I}} E$  e  $(E \cap D) \setminus C \neq \emptyset$  allora  $C \triangleleft_{\mathcal{I}} D$ . Infatti se  $C = M(k), E = M(h)$  e  $D = M(l)$  vale che  $C \triangleleft_{\mathcal{I}} E$  implica  $k < h$ ; se  $v \in (E \cap D) \setminus C$  allora  $\{h, l\} \subseteq I_v$  ma  $k \notin I_v$  quindi  $l > k$  da cui  $C \triangleleft_{\mathcal{I}} D$ . Fissata una clique massimale  $M$  che supponiamo essere un possibile inizio in una rappresentazione ad intervalli  $\mathcal{I}$  di  $G$ , questa proprietà di  $\triangleleft_{\mathcal{I}}$  verrà usata nella prossima definizione con l'obiettivo di definire un ordine  $\prec_M$  sulle clique massimali ricorsivamente (quindi esprimibile in FP) che "assomigli" a  $\triangleleft_{\mathcal{I}}$ . In particolare, se  $\mathcal{I}$  è una rappresentazione ad intervalli di  $G$  in cui  $M$  è la clique  $\triangleleft_{\mathcal{I}}$ -minima, vale che  $\prec_M \subseteq \triangleleft_{\mathcal{I}}$  e questo ci permetterà di ottenere informazioni sulla struttura del grafo.



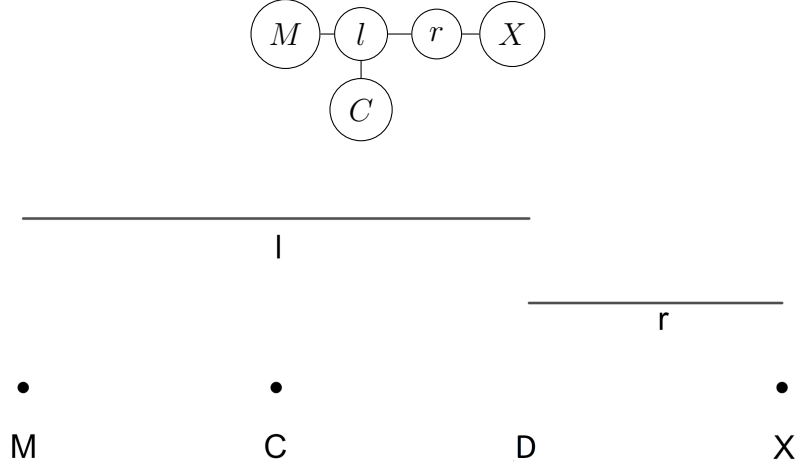


Figura 5: Esempio 4.4

**Definizione 4.12.** Sia  $\mathcal{M}$  l'insieme delle clique massimali di un grafo ad intervalli  $G = (V, E)$  e sia  $M \in \mathcal{M}$ . Definiamo ricorsivamente la relazione binaria  $\prec_M$  sugli elementi di  $\mathcal{M}$  come segue:

inizializzazione:  $\forall C \in \mathcal{M} \setminus \{M\} M \prec_M C$

$$C \prec_M D \text{ se } \begin{cases} \exists E \in \mathcal{M} \text{ con } E \prec_M D \text{ e } (E \cap C) \setminus D \neq \emptyset \text{ oppure} \\ \exists E \in \mathcal{M} \text{ con } C \prec_M E \text{ e } (E \cap D) \setminus C \neq \emptyset \end{cases}$$

Vediamo un esempio per comprendere questa definizione.

**Esempio 4.4.** Consideriamo il grafo ad intervalli indotto dalla rappresentazione in Figura 5. Supponiamo di aver preso la clique massimale  $M$  come possibile inizio, allora  $C \prec_M X$  siccome  $l \in C \cap M \setminus X$  e  $M \prec_M X$  dal passo di inizializzazione. Analogamente  $D \prec_M X$  in quanto  $l \in D \cap M \setminus X$  e  $M \prec_M X$  dal passo di inizializzazione. Nel secondo passo si ottiene che  $C \prec_M D$  in quanto  $r \in D \cap X \setminus C$  e  $C \prec_M X$ . In questo esempio  $\prec_M$  risulta proprio essere l'ordine lineare  $\prec_{\mathcal{I}}$  sulle clique massimali di  $G$ . Tuttavia questo non accade sempre, come vedremo nell'Esempio 4.5.

Possiamo definire  $\prec_M$  con l'uso di operatori a punti fissi inflazionari, dove le clique massimali sono definite da elementi di  $V^2 / \sim$ .

Dalla definizione ricorsiva di  $\prec_M$  segue facilmente che, se  $M$  è la minima clique per una rappresentazione ad intervalli  $\mathcal{I}$ , allora  $\prec_M \subseteq \prec_{\mathcal{I}}$ . Quindi, per quanto visto nel precedente paragrafo, se per qualche  $M \in \mathcal{M}$  la relazione binaria  $\prec_M$  risulta essere un ordine lineare su  $\mathcal{M}$  allora è possibile costruire la canonizzazione. Tuttavia questo non sempre si verifica, ma la relazione  $\prec_M$  presenta comunque delle ottime proprietà che ci permetteranno di costruire una canonizzazione.

**Lemma 4.4.** Se  $\prec_M$  è asimmetrico allora è transitivo. Dunque, se  $\prec_M$  è asimmetrico, allora è un ordine parziale stretto.

*Dimostrazione.* Chiamiamo catena di derivazione di lunghezza  $k$  una sequenza del tipo:  $X_0 \prec_M Y_0, X_1 \prec_M Y_1, \dots, X_k \prec_M Y_k$  in modo che  $X_0 = M$  e la sequenza sia generata da applicazioni di 4.12. Ovviamente, ad ogni relazione  $X \prec_M Y$  vi è associata una (non necessariamente unica) catena di derivazione con ultimo elemento  $X \prec_M Y$ .

Assumiamo che  $\prec_M$  sia asimmetrico. Supponiamo  $A \prec_M B$  e  $B \prec_M C$  e sia  $(L_0, \dots, L_a)$  una catena di derivazione lunga  $a$  di  $A \prec_M B$ . Procediamo con una dimostrazione per induzione su  $a$ . Se  $a = 0$ , allora  $A = M$  e  $A \prec_M C$  vale per inizializzazione di  $\prec_M$ . Supponiamo  $a = n$  e consideriamo il penultimo elemento  $L_{n-1}$  della catena di derivazione. Esistono due casi:

- $L_{n-1} = (X \prec_M B)$  ed esiste un vertice  $v \in (X \cap C) \setminus B$  e  $A \prec_M B$ : per induzione vale che  $X \prec_M C$ . Adesso, se  $v \in C$ , il fatto che  $A \prec_M B$  implicherebbe  $C \prec_M B$ , il quale contraddice l'asimmetria. Dunque,  $v \notin C$  e una applicazione di 4.12 porta ad  $A \prec_M C$ .
- $L_{n-1} = (A \prec_M X)$  ed esiste un vertice  $v \in (X \cap B) \setminus A$ : se  $v \in C$  allora segue immediatamente che  $A \prec_M C$ . Se  $v \notin C$  allora  $X \prec_M C$ . Segue quindi da  $B \prec_M C$  possiamo derivare  $A \prec_M X \prec_M C$ , dove la catena di derivazione ha lunghezza  $n-1$ . Per ipotesi induttiva segue che  $A \prec_M C$ .

□

Nel caso in cui  $\prec_M$  non sia un ordine lineare, abbiamo bisogno di arricchire la nostra informazione riguardo la struttura di un grafo ad intervalli per costruire la canonizzazione. I seguenti lemmi, dimostrati nell'articolo di Laubner ([1]), ampliano la nostra conoscenza riguardo la struttura di un grafo ad intervalli.

**Lemma 4.5.** *Sia  $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$  un insieme di clique massimali con  $M \notin \mathcal{C}$ . Supponiamo che per ogni  $A \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{C}$  e per ogni  $C, C' \in \mathcal{C}$  vale che  $A \cap C = A \cap C'$ . Allora le clique massimali di  $\mathcal{C}$  sono mutualmente inconfrontabili rispetto alla relazione  $\prec_M$ .*

Il lemma seguente è il viceversa di quello precedente, a cui è aggiunta l'ipotesi che l'insieme di clique massimali considerato sia massimale.

**Lemma 4.6.** *Supponiamo  $M$  sia una clique massimale di  $G$  e  $\mathcal{C}$  un insieme massimale di clique massimali inconfrontabili rispetto  $\prec_M$ . Sia  $D \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{C}$ . Allora  $D \cap C = D \cap C'$  per ogni  $C, C' \in \mathcal{C}$ .*

Il Lemma 4.6 ci dice che clique massimali inconfrontabili interagiscono con il resto dell'insieme  $\mathcal{M}$  in modo uniforme. Rendiamo questa nozione più precisa.

**Definizione 4.13.** *Un modulo di  $G$  è un insieme di vertici  $S \subseteq V$  tale che per ogni altro vertice  $x \in V \setminus S$ ,  $S$  è completamente connesso o completamente sconnesso da  $x$ .*

In altre parole,  $S$  è un modulo di  $G$  se  $\forall u, v \in S$  e  $x \in V \setminus S$  vale che  $(u, x) \in E$  se e solo se  $(v, x) \in E$ .

**Corollario 4.3.** *Supponiamo  $M$  sia una clique massimale di  $G$  per cui  $\prec_M$  è un ordine parziale stretto e  $\mathcal{C}$  è un insieme massimale di clique massimali inconfrontabili in  $\prec_M$ . Allora*

- $S_{\mathcal{C}} := (\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C) \setminus (\bigcup_{D \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{C}} D)$  è un modulo di  $G$ , e
- $S_{\mathcal{C}} = \{v \in \bigcup \mathcal{C} \mid \text{span}(v) \leq |\mathcal{C}|\}$ .

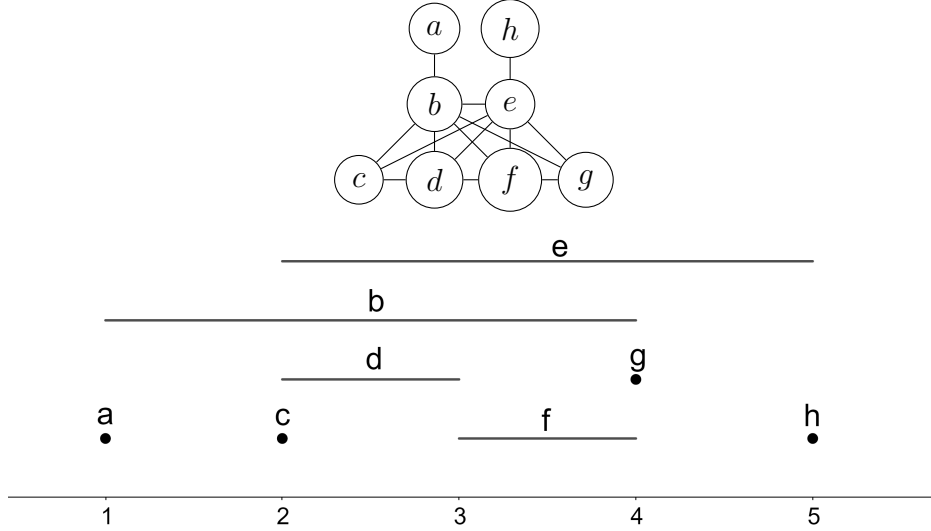


Figura 6: L'insieme  $\{c, d, f, g\}$  è un modulo.

*Dimostrazione.* Siano  $u, v \in S_{\mathcal{C}}$  e  $x \in V \setminus S_{\mathcal{C}}$  e supponiamo che  $(u, x) \in E$  ma  $(v, x) \notin E$ . Allora esiste una clique massimale  $C \in \mathcal{M}$  con  $u, x \in C$  ma  $v \notin C$  e siccome  $u \in S_{\mathcal{C}}$  dobbiamo avere che  $C \in \mathcal{C}$ . Dalla definizione di  $S_{\mathcal{C}}$ , anche  $x$  è contenuto in qualche clique massimale  $D \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{C}$ . Infine sia  $C'$  una clique massimale in  $\mathcal{C}$  contenente  $v$ ; da  $(v, x) \notin E$  segue allora  $x \notin C'$ . Quindi  $D \cap C \neq D \cap C'$ , contraddicendo il Lemma 4.6.

Dimostriamo la seconda affermazione. Sia  $v \in \bigcup \mathcal{C}$ . Se  $v \in S_{\mathcal{C}}$ , allora tutte le clique massimali che contengono  $v$  sono in  $\mathcal{C}$ , quindi  $\text{span}(v) \leq |\mathcal{C}|$ . Se  $v \notin S_{\mathcal{C}}$ , allora è contenuto in qualche  $D \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{C}$  e, per il Lemma 4.6,  $v$  deve anche essere contenuto in tutte le clique massimali di  $\mathcal{C}$ . Dunque,  $\text{span}(v) > |\mathcal{C}|$  dimostrando l'affermazione.  $\square$

**Esempio 4.5.** Vediamo un esempio di modulo  $S_{\mathcal{C}}$ . Consideriamo la rappresentazione in Figura 6 e consideriamo l'ordine delle clique massimali  $\prec_{M(1)}$  indotto dalla Definizione 4.12. Avremo che  $M(1) \prec_{M(1)} M(2), M(3), M(4), M(5)$  per inizializzazione. Si ha inoltre che  $M(2), M(3), M(4) \prec_{M(1)} M(5)$  in quanto  $M(1) \prec_{M(1)} M(2), M(3), M(4)$  e  $b \in (M(1) \cap M(2) \cap M(3) \cap M(4)) \setminus M(5)$ . Mostriamo che non vi sono altre relazioni. Le uniche plausibili affinché  $\prec_{M(1)} \subseteq \prec_{\mathcal{I}}$  sono  $M(2) \prec_{M(1)} M(3); M(3) \prec_{M(1)} M(4)$  e  $M(2) \prec_{M(1)} M(4)$ . Verifichiamo che  $M(2) \not\prec_{M(1)} M(3)$  (le altre si svolgono in modo analogo). Le uniche relazioni già presenti sono con  $M(1)$  e  $M(5)$ . Abbiamo che  $M(1) \prec_{M(1)} M(3)$  ma  $(M(1) \cap M(2)) \setminus M(3) = \emptyset$  e anche se  $M(2) \prec_{M(1)} M(5)$  vale che  $(M(5) \cap M(3)) \setminus M(2) = \emptyset$  dunque la relazione  $M(2) \prec_{M(1)} M(3)$  non si può ottenere da quelle già esistenti. Otteniamo che  $\mathcal{C} = \{M(2), M(3), M(4)\}$  è un insieme massimale, non singolare, di clique massimali inconfrontabili rispetto a  $\prec_{M(1)}$ . L'insieme  $S_{\mathcal{C}} = \{b, c, d, e, f, g\} \setminus \{a, b, e, h\} = \{c, d, f, g\}$  risulta essere un modulo.

La caratterizzazione dei moduli di tipo  $S_{\mathcal{C}}$  sarà centrale nella procedura di canonizzazione. Vediamo un altro corollario del Lemma 4.6.

**Corollario 4.4.** Se  $M$  è una clique massimale di  $G$  tale che  $\prec_M$  sia un ordine parziale stretto, allora  $\prec_M$  è un ordine debole.

*Dimostrazione.* Abbiamo bisogno di dimostrare che la  $\prec_M$ -inconfrontabilità è una relazione transitiva delle clique massimali di  $G$ . Siano  $(A, B)$  e  $(B, C)$  coppie incon-

frontabili rispetto  $\prec_M$ . Siano  $\mathcal{C}_{AB}$  e  $\mathcal{C}_{BC}$  i più grandi insiemi di clique massimali inconfrontabili contenenti rispettivamente  $\{A, B\}$  e  $\{B, C\}$ . Dal Lemma 4.6, abbiamo che  $D \cap X = D \cap B = D \cap Y$  per ogni  $X, Y \in \mathcal{C}_{AB} \cup \mathcal{C}_{BC}$  e  $D \in \mathcal{M} \setminus (\mathcal{C}_{AB} \cup \mathcal{C}_{BC})$ . Siccome  $M \notin \mathcal{C}_{AB} \cup \mathcal{C}_{BC}$  il Lemma 4.5 implica che le clique massimali in  $\mathcal{C}_{AB} \cup \mathcal{C}_{BC}$  sono  $\prec_M$ -inconfrontabili, in particolare  $A$  e  $C$  lo sono.  $\square$

A questo punto mostriamo che, porre una clique massimale arbitraria  $M$  come inizio di  $G$  e definire  $\prec_M$  permette di ottenere informazioni sulla struttura di  $G$ .

**Lemma 4.7.** *Sia  $M$  una clique massimale di un grafo ad intervallo  $G$ . Allora  $\prec_M$  è un ordine stretto debole se e solo se  $M$  è un possibile inizio per  $G$ .*

*Dimostrazione.* Se  $M$  è un possibile inizio per  $G$ , sia allora  $\mathcal{I}$  un rappresentazione ad intervalli minimale di  $G$  avente  $M$  come prima clique massimale. Sia  $\triangleleft_{\mathcal{I}}$  l'ordine lineare indotto da  $\mathcal{I}$  sulle clique massimali di  $G$ . Per dimostrare l'asimmetria è sufficiente mostrare che  $\prec_M \subseteq \triangleleft_{\mathcal{I}}$ . Ma questo si verifica dalla Definizione 4.12: l'inizializzazione è ovviamente soddisfatta e, ad ogni passo, costruisco relazioni sempre coerenti con  $\triangleleft_{\mathcal{I}}$ . Dunque l'ordine è asimmetrico e, per il Lemma 4.4 ed il Corollario 4.4 si ha che  $\prec_M$  è un ordine debole stretto.

Viceversa, supponiamo  $\prec_M$  sia un ordine stretto debole. Il primo obiettivo è quello di arricchire le relazioni di  $\prec_M$  in modo da costruire un ordine lineare (che denoteremo con  $\triangleleft_M$ ) sull'insieme  $\mathcal{M}$  di tutte le clique massimali di  $G$ . Notiamo per prima cosa che, se  $\prec_M$  è un ordine stretto debole, allora gli insiemi massimali di clique massimali inconfrontabili rispetto a  $\prec_M$  coincidono con le classi d'equivalenza di  $\sim$  su  $\mathcal{M}$ . Questo ci permette di definire senza ambiguità un ordine lineare  $\triangleleft_M$  che estende  $\prec_M$  nel modo seguente. Sia  $\mathcal{C}$  un insieme massimale di clique massimali  $\prec_M$ -inconfrontabili. Ricordiamo che  $S_{\mathcal{C}} = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{C}} D$  è un modulo. Siccome  $G[S_{\mathcal{C}}]$  è un grafo ad intervalli, possiamo prendere una rappresentazione  $\mathcal{I}_{S_{\mathcal{C}}}$  per  $G[S_{\mathcal{C}}]$ .

L'insieme delle clique massimali di  $G[S_{\mathcal{C}}]$  è dato da  $\{C \cap S_{\mathcal{C}} \mid C \in \mathcal{C}\}$  e tale insieme risulterà in biezione con le clique massimali in  $\mathcal{C}$ . Per dimostrarlo è sufficiente verificare che  $C \cap S_{\mathcal{C}} \neq C' \cap S_{\mathcal{C}}$  per ogni  $C \neq C'$  in  $\mathcal{C}$ . Otteniamo dunque che  $\mathcal{I}_{S_{\mathcal{C}}}$  induce un ordine lineare  $\triangleleft_{\mathcal{C}}$  sugli elementi di  $\mathcal{C}$ .

Costruiamo un ordine lineare  $\triangleleft_M$ : sia  $C \triangleleft_M D$  se e solo se  $C \prec_M D$  oppure  $C, D \in \mathcal{C}$  per qualche insieme massimale di clique massimali  $\prec_M$ -inconfrontabili  $\mathcal{C}$  e  $C \triangleleft_{\mathcal{C}} D$ . Questo è un ordine stretto lineare in quanto  $\prec_M$  è un ordine stretto debole e, per costruzione, avremo che gli elementi di una classe  $\mathcal{C}$  di  $\prec_M$ -inconfrontabili sono ordinati in  $\triangleleft_M$  grazie all'ordine lineare su  $\mathcal{C}$  dato da  $\triangleleft_{\mathcal{C}}$ .

Vogliamo dimostrare che  $\triangleleft_M$  è un ordine delle clique massimali isomorfo all'ordine lineare indotto da qualche rappresentazione ad intervalli di  $G$ . Questo implicherà che  $M$  è un possibile inizio per  $G$ .

Per far questo, grazie alla Proposizione 4.2, è sufficiente verificare che ogni vertice  $v \in V$  è contenuto in clique massimali consecutive rispetto  $\triangleleft_M$ . Supponiamo per assurdo che esistano  $A, B, C$  clique massimali per cui  $A \triangleleft_M B \triangleleft_M C$  e  $v \in A, C$  ma  $v \notin B$ . Questo non può accadere se  $A, B, C$  fossero inconfrontabili rispetto  $\prec_M$  in quanto avremo che valgano  $A \triangleleft_{\mathcal{C}} B \triangleleft_{\mathcal{C}} C$ , il che è in contraddizione con l'appartenenza dei nodi a clique massimali consecutive del grafo ad intervallo  $G[S_{\mathcal{C}}]$  (Proposizione 4.2). Quindi assumiamo (senza perdita di generalità) che  $A \prec_M B$ . Siccome  $v \in (A \cap C) \setminus B$ , la Definizione 4.12 implica che  $C \prec_M B$ , il che contraddice l'asimmetria di  $\triangleleft_M$ .  $\square$

**Costruiamo la canonizzazione.** Siccome  $\prec_M$  è FP-definibile per ogni clique massimale  $M$  e visto che anche l'asimmetria di  $\prec_M$  è FO-definibile, il Lemma 4.7 ci permette di definire possibili inizi in FP. Mostriamo ora che, se  $G$  è un qualsiasi grafo ad intervalli e  $M$  un possibile inizio, possiamo definire un ordine di quei vertici che non sono contenuti in un modulo.

**Definizione 4.14.** *Sia  $G = (V, E)$  un grafo ad intervalli e  $M$  un possibile inizio. Sia  $\approx_M^G$  la relazione di equivalenza su  $V$  per la quale  $x \approx_M^G y$  se e solo se  $x = y$  oppure esiste un insieme massimale, non singolare, di clique massimali  $\prec_M$ -inconfrontabili  $\mathcal{C}$  tale che  $x, y \in S_{\mathcal{C}}$ . Denoto la classe di equivalenza di  $x \in V$  rispetto  $\approx_M^G$  con  $[x]$  e definisco la relazione di adiacenza  $E_M$  del grafo  $G_M = (V/\approx_M^G, E_M)$  nel seguente modo:  $([u], [v]) \in E_M : \iff \exists x \in [u], \exists y \in [v]$  tale che  $(x, y) \in E$ .*

Segue direttamente dalla definizione di  $\approx_M^G$  che se  $A$  è una clique massimale che è  $\prec_M$ -confrontabile a tutte le altre clique massimali di  $G$  (si ponga attenzione a "non singolare" nella definizione di  $\approx_M^G$ ), allora gli elementi  $v$  di  $A$  sono singoletti ( $[v] = \{v\}$ ).

Si può dimostrare che  $\prec_M$  induce un ordine lineare stretto sulle clique massimali di  $G_M$ . Questo mostra che  $G_M$  è un grafo ad intervalli con una rappresentazione valida indotta da  $\prec_M$  (Teorema 4.2). Abbiamo dunque un ordine lineare delle clique massimali di  $G_M$ . Per realizzare la canonizzazione di  $G$  rimangono da considerare gli insiemi  $S_{\mathcal{C}}$  (questi sono gli insiemi che vengono trasformati in nodi di  $G_M$ ) che si ottengono dagli insiemi massimali di inconfrontabili  $\mathcal{C}$  applicando la definizione nel Corollario 4.3. Il motivo per cui questa estensione si può realizzare è dovuto al fatto che gli insiemi  $S_{\mathcal{C}}$  interagiscono con i nodi di  $G \setminus S_{\mathcal{C}}$  in modo uniforme (Definizione 4.13). Per la dimostrazione dettagliata (non banale) si veda l'articolo di Laubner ([1]).

Diamo infine un'idea di come si possa dimostrare il Corollario 4.1. Vogliamo dimostrare che la classe dei grafi ad intervallo è FP+C definibile. Per farlo si può dimostrare che, per riconoscere un grafo ad intervalli, è sufficiente verificare le seguenti due proprietà:

- ogni relazione di adiacenza del grafo  $G$  è contenuta in qualche clique massimale che è definita da una coppia di vertici come nel Lemma 4.3;
- la procedura di canonizzazione descritta da Laubner determina un grafo delle stesse dimensioni nella componente numerica.

Ogni grafo ad intervallo soddisfa le due proprietà sopra. Viceversa assumiamo che  $G = (V, E)$  soddisfi queste condizioni, e sia  $H = (|V|, \varepsilon)$  il grafo ordinato ottenuto dalla procedura di canonizzazione. L'osservazione fondamentale è che la procedura di canonizzazione realizza sempre un grafo ad intervalli, dunque  $H$  lo sarà. Basterà allora verificare che una qualsiasi biezione "coerente" con la canonizzazione (esistono diverse biezioni "coerenti" tra un grafo  $G$  ed il suo canonizzato  $H$  in quanto i nodi di uno stesso modulo sono interscambiabili), insieme alle ipotesi assunte  $G$ , risulta essere un isomorfismo.

## Riferimenti bibliografici

- [1] B. Laubner, *Capturing Polynomial Time on Interval Graphs*, 2011.
- [2] E. Grädel, P.G. Kolaitis, L. Libkin, M. Marx, J. Spencer, M.Y. Vardi, Y. Venema, S. Weinstein, *Finite Model Theory and Its Applications*, 2007.
- [3] A. Dawar, *The Nature and Power of Fixed-Point Logic with Counting*, 2015.
- [4] H.D. Ebbinghaus, J. Flum, *Finite Model Theory*, 1999.
- [5] M. Luks, *Isomorphism of Graphs of Bounded Valence Can be Tested in Polynomial*, 1982.
- [6] J.Y. Cai, M. Fürer e N. Immerman, *An Optimal Lower Bound on the Number of Variables for Graph Identification*, 1992.
- [7] N. Robertson, P.D. Seymour, *Graph Minors. XX. Wagner's conjecture*, 2004.
- [8] M. Grohe, *Fixed-Point Logics on Planar Graphs*, 1998.
- [9] M. Grohe e J. Mariño, *Definability and Descriptive Complexity on Databases of Bounded Tree Width*, 1999.
- [10] M. Grohe, *Descriptive Complexity, Canonisation, and Definable Graph Structure Theory*, 2014.
- [11] M. Grohe, *Fixed-point definability and polynomial time on chordal graphs and line graphs*, 2010.
- [12] P. Zhang, E.A. Schon, S.G. Fischer, E. Cayanis, J. Weiss, S. Kistler e P.E. Bourne, *An algorithm based on graph theory for the assembly of contigs in physical mapping of DNA*, 1994.
- [13] R.H. Möhring, *Graphs and Order, volume 147 of NATO ASI Series C, Mathematical and Physical Sciences*, 1984.
- [14] C. G. Lekkerkerker and J. Ch. Boland, *Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line*, 1962.
- [15] H.D. Ebbinghaus, J. Flum e W. Thomas, *Mathematical Logic. Springer-Verlag, 2nd edition*, 1994.
- [16] M. Grohe, *Fixed-point definability and polynomial time on chordal graphs and line graphs*, 2010.
- [17] M.C. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, 2004.
- [18] Y. Gurevich, *Logic and the Challenge of Computer Science*, pagine 1–57, 1988.
- [19] A. Dahan e A. Dawar, *Relativization of Gurevich's Conjectures*, 2002.